

© Copyright by Dai-Hua, Wang 2009
All Rights Reserved.

Lecture 4 Error Analysis and Calculation (Part 1)

王代华, 博士, 教授, 博士生导师
Dr. Dai-Hua, Wang, Professor

PILab 精密與智能實驗室
Precision and Intelligence Laboratory

重庆大学, 光电工程学院, 重庆 40004

<http://www.pilab.coe.cqu.edu.cn/>

Email: dhwang@cqu.edu.cn

Tel: 023-65112105, 65102511, Fax: 65112105

Outline

□ Part 1

- ✍ Basic concept
- ✍ Steps of error analysis and calculation
- ✍ Error independent functional principle (EIFP)
- ✍ Error analysis methods

□ Part 2

- ✍ 误差综合
- ✍ 示例：立式光学计的误差分析与综合过程

□ 本节小结

□ 本节需要掌握的知识点



Error Analysis/Precision Analysis

- 寻找影响仪器精度的根源及其规律，进而计算误差的大小和其对仪器总精度的影响程度，以便正确地选择仪器设计方案，合理地确定结构和技术参数，并为科学合理地设置误差补偿环节提供依据，进而在确保经济性的条件下获得满足要求的仪器总精度。

Steps

- ❑ Step 1. Determine the error sources
- ❑ Step 2. Analysis the influence of each source on the accuracy of instrument
- ❑ Step 3. Precision propagation & accumulation



- ❑ For the ideal conditions, the relationship between the output and the measurand and the characteristic parameters of the instrument

Indicate under ideal conditions

Measurand

$$y_0 = f(x, q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})$$

Design values of characteristic parameters

Number of characteristic parameters

- ❑ Assume the errors of the characteristic parameters of the instrument are Δq_i , then

$$q_1 = q_{01} + \Delta q_1$$

$$q_2 = q_{02} + \Delta q_2$$

$$\vdots$$

$$q_n = q_{0n} + \Delta q_n$$

Source errors of relating characteristic parameters

- ❑ Practical output equation

$$y = f(x, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

□ Instrument error equation

$$\begin{aligned}\Delta y &= y - y_0 \\ &= f(x, q_1, q_2, \dots, q_n) - f(x, q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})\end{aligned}$$

□ Only $\Delta q_i \neq 0$, the instr. error due to Δq_i is

$$\begin{aligned}\Delta y_i &= y_i - y_0 \\ &= f(x, q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0(i-1)}, (q_{0i} + \Delta q_i), q_{0(i+1)}, \dots, q_{0n}) \\ &\quad - f(x, q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})\end{aligned}$$

□ Simplification

$$\Delta y_i \approx \partial y_i = \frac{\partial y}{\partial q_i} \Delta q_i$$



EIFP

- Δy_i (Local error ΔQ_i) is the error only due to Δq_i

$$\Delta Q_i = \frac{\partial y}{\partial q_i} \Delta q_i$$

Error influence coefficient
based on Actual Equation

- The instr. equation does exist before manufacturing

$$\Delta Q_i = \frac{\partial y_0}{\partial q_i} \Delta q_i$$

Error influence coefficient
based on Ideal Equation

- ❑ When there are characteristic errors for all characteristic parameters, which are independent, the instrument error equals

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_0}{\partial q_i} \Delta q_i = \sum_{i=1}^n P_i \Delta q_i = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i$$

- ❑ 误差独立作用原理



EIFP/误差独立作用原理

- ❑ 一个源误差仅使仪器产生一个局部误差，局部误差是源误差的线性函数，与其他源误差无关，仪器总误差是局部误差的综合。
- ❑ 根据误差独立作用原理，可以用逐个计算源误差所引起的局部误差，然后用综合局部误差的方法计算仪器总误差。
- ❑ 依据误差独立作用原理，在分析计算一个源误差所引起的局部误差的过程中，视其余各特性参数为理想数值，并且忽略了各源误差对仪器精度影响的相关性以及非线性，因此误差独立作用是近似原理，但在大多数情况下都能适用。

Error Analysis Methods

- ❑ Differential method
- ❑ Geometric method
- ❑ Functional line and instantaneous arm method
- ❑ Mathematical fitting method
- ❑ Error analysis method for control systems
- ❑ Vector Algebra
- ❑ Coordinate Transformation
- ❑ Other methods
- ❑ Summary

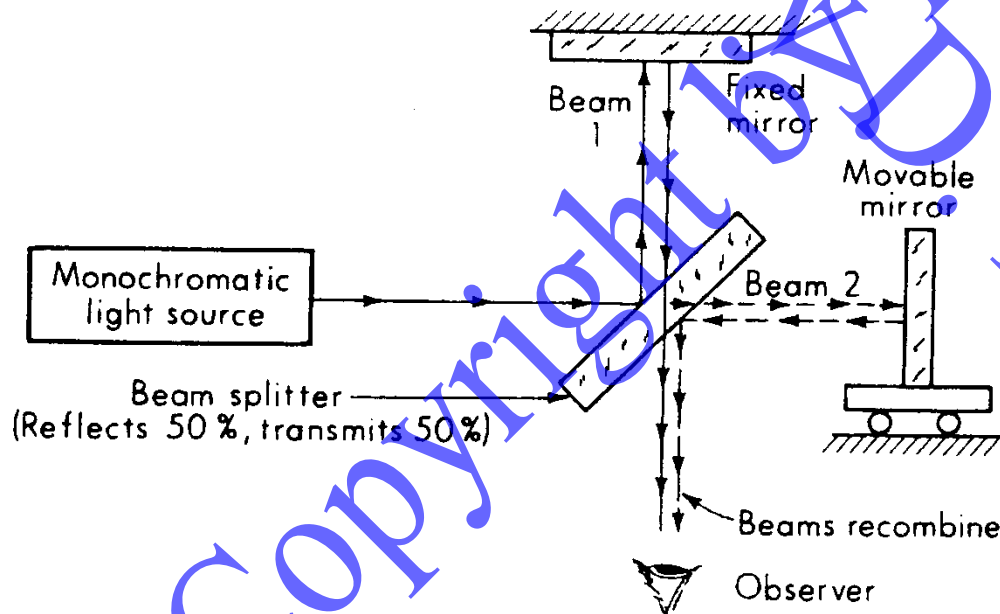


Differential Method

□ Differential Method

✍ 若能列出仪器全部或局部的作用原理方程，当源误差为各特性或结构参数误差时，可以用对作用原理方程求全微分的方法来求各源误差对仪器精度的影响

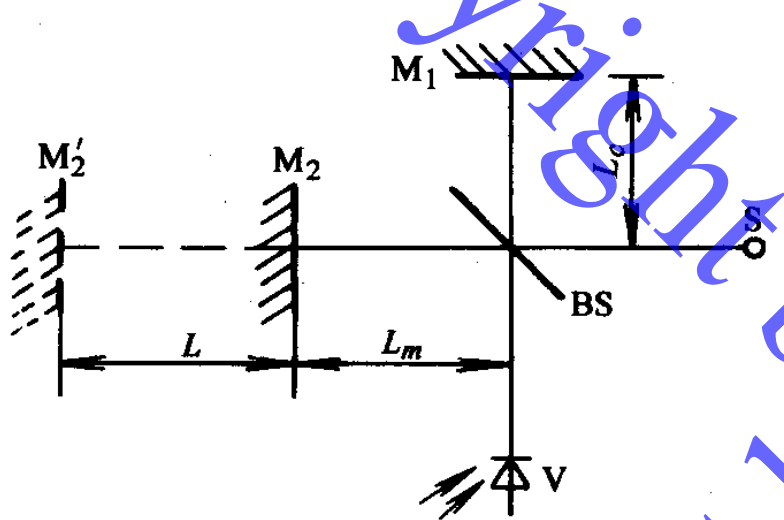
□ Ex: Error analysis of a laser interferometer



Original Michelson
Interferometer
--In the 1890s

Error Analysis of a Laser Interferometer

□ Working principle of a laser interferometer



$$\delta_1 = 2n(L_m - L_c) \quad K_1 = \frac{2n(L_m - L_c)}{\lambda_0}$$

$$\delta_2 = 2n(L_m - L_c) + 2nL$$

$$K = K_2 + K_1 = \frac{2nL}{\lambda_0} + \frac{2n(L_m - L_c)}{\lambda_0}$$

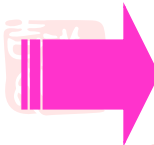

$$L = \frac{K\lambda_0}{2n} - (L_m - L_c)$$

□ Application of Differential method

Error Analysis of a Laser Interferometer

- ❑ Working principle of a laser interferometer
- ❑ Application of Differential method

$$\begin{aligned}dL &= \frac{\partial L}{\partial K}dK + \frac{\partial L}{\partial \lambda_0}d\lambda_0 + \frac{\partial L}{\partial n}dn - \frac{\partial L}{\partial (L_m - L_c)}d(L_m - L_c) \\&= \frac{\lambda_0}{2n}dK + \frac{K}{2n}d\lambda_0 - \frac{K\lambda_0}{2n^2}dn - d(L_m - L_c)\end{aligned}$$


$$\Delta L \approx \frac{\lambda_0}{2n}\Delta K + \frac{K}{2n}\Delta\lambda_0 - \frac{K\lambda_0}{2n^2}\Delta n - \Delta(L_m - L_c)$$

$$L = \frac{K\lambda_0}{2n} \quad \text{--Under Ideal Condition}$$

- ❑ Error of a laser interferometer

$$\Delta L \approx L \left(\frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda} - \frac{\Delta n}{n} \right) - \Delta(L_m - L_c)$$

Differential Method

□ Advantages

✍ 运用微分运算解决误差计算问题，具有简单、快速的优点

□ Disadvantages

✍ 对于不能列入仪器作用方程的温度误差，不能用微分法求解其对仪器精度产生的影响

✍ **Ex:** 仪器中经常遇到的测杆间隙、废盘的安装偏心等，此类源误差通常产生于装配调整环节，与仪器作用方程无关

Geometric Method

□ Geometric Method

✍ 利用源误差与其局部误差之间的几何关系，分析计算源误差对仪器精度的影响

□ Detailed Steps

✍ 画出机构作用原理图

✍ 按比例放大地画出源误差与局部误差之间的关系

✍ 从图上直接量出误差，或者依据其中的几何关系写出局部误差表达式，将源误差代入，求出局部误差大小

Geometric Method

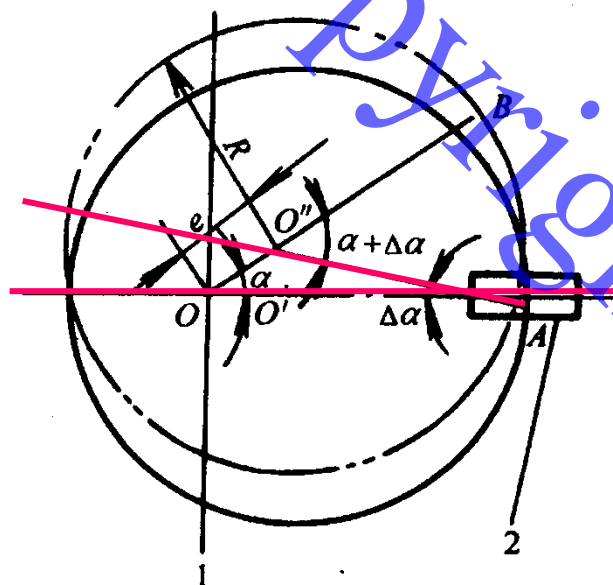
□ Cases

✍ **Ex: Reading Error due to Eccentricity of Dial Installation**

✍ **Ex: Error Analysis of Helix Structure**



Reading Error due to Eccentricity of Dial Installation



□ Reading error

$$(\alpha + \Delta\alpha) - \alpha = \Delta\alpha$$

□ Sine law

$$\frac{\sin \alpha}{O'A} = \frac{\sin \Delta\alpha}{e} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\sin \Delta\alpha}{e}$$

$\Delta\alpha$ is very SMALL

$$\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$$

$$\Delta\alpha = \frac{e}{R} \sin \alpha$$

$$|\sin \alpha| \leq 1 \rightarrow \Delta\alpha_{\max} = \pm \frac{e}{R}$$

O -- Rotating center

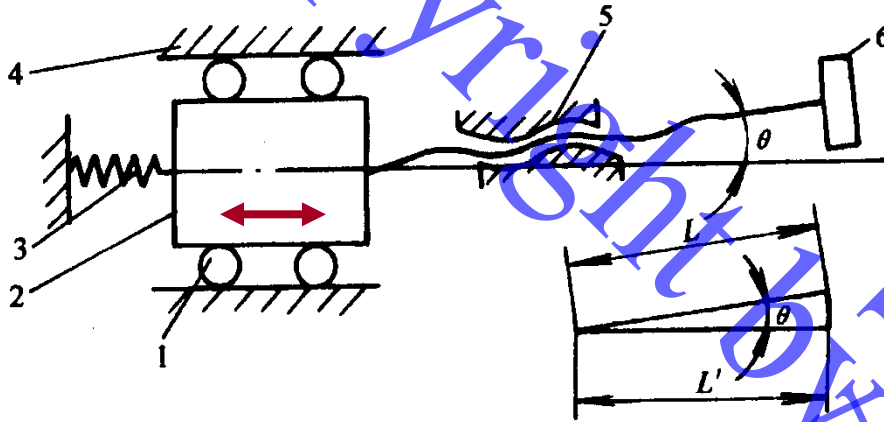
O' -- Geometrical center

e -- Eccentricity

α -- Rotating angle of spindle

$\Delta\alpha$ -- Reading error

Ex: Error Analysis of Helix Structure



$$L = \frac{\varphi}{2\pi} P$$

$$L' = L \cos \theta = \frac{\varphi}{2\pi} P \cos \theta$$

$$\Delta L = L - L'$$

$$= \frac{\varphi}{2\pi} P - \frac{\varphi}{2\pi} P \cos \theta$$

$$= \frac{\varphi}{2\pi} P (1 - \cos \theta)$$

$$\approx \frac{\varphi}{4\pi} P \theta^2$$

Geometric Method

□ Advantages

✍ 简单、直观，适合于求解机构中未能列入作用方程的源误差所引起的局部误差

□ Disadvantages

✍ 在应用于分析计算复杂机构运行误差时较为困难

作用线与瞬时臂法

- 背景
- 机构传递位移的规律及传递公式
- 误差怎样伴随运动的传递过程传递到示值，从而造成指示件(或从动件)的示值误差



作用线与瞬时臂法：背景

- ❑ 前面几种误差分析方法都是直接导出源误差（**Original Error**）与局部误差（**Local Error**）之间的关系，并没有分析各个源误差对仪器精度产生影响的中间过程
- ❑ 有些源误差是随着机构传递位移逐步传递到仪器示值上
 **Ex:** 例如齿轮的周节误差、齿形误差等
- ❑ 为研究仪器实际机构各源误差对仪器精度的影响，就必须研究各项源误差在机构中的传递过程
- ❑ 作用线与瞬时臂法正是基于源误差在机构中的传递机理与机构传递位移的过程紧密相关这一设想而提出的

作用线与瞬时臂法：主要研究内容

- 机构传递位移的规律及传递公式
- 误差怎样伴随运动的传递过程传递到示值，从而造成指示件(或从动件)的示值误差



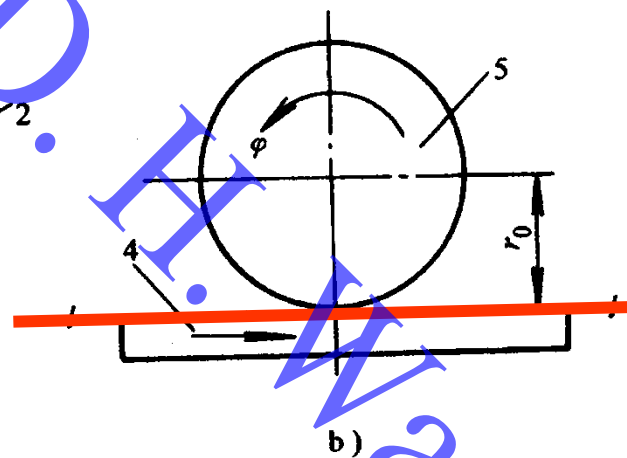
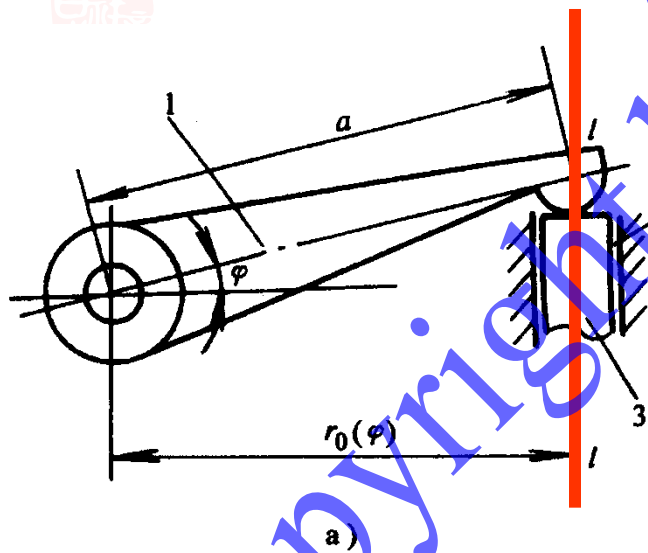
作用线与瞬时臂法：机构(运动副) 传递位移的方式

□ 推力传动

✍ 传递位移时一对运动副之间的相互作用力为推力

□ 摩擦力传动

✍ 传递位移时一对运动副之间的相互作用力为摩擦力



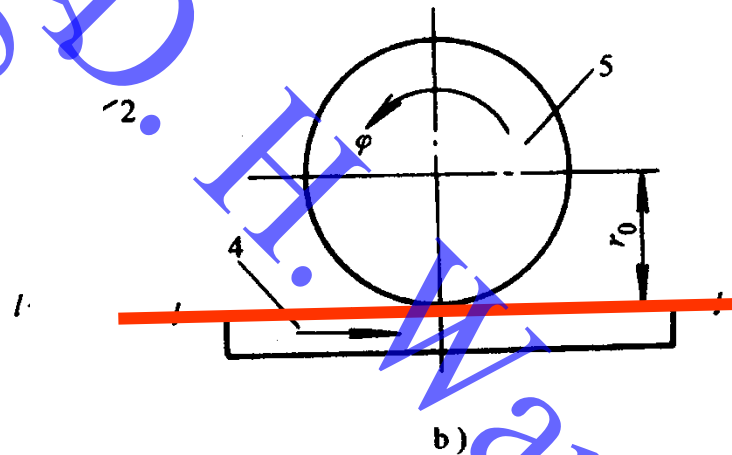
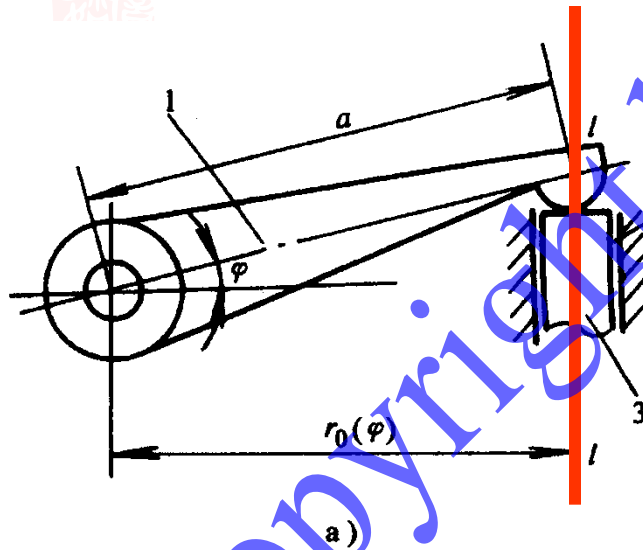
作用线与瞬时臂法

□ 作用线：一对运动副之间瞬时作用力的方向线

✍ 推力传动的作用线是两构件接触区的公法线

✍ 摩擦力传动的作用线是两构件接触区的公切线

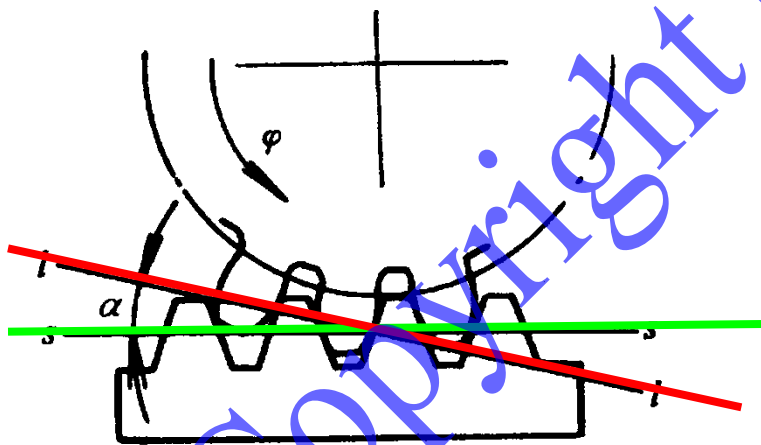
□ 位移线：质点移动的轨迹



作用线与瞬时臂法

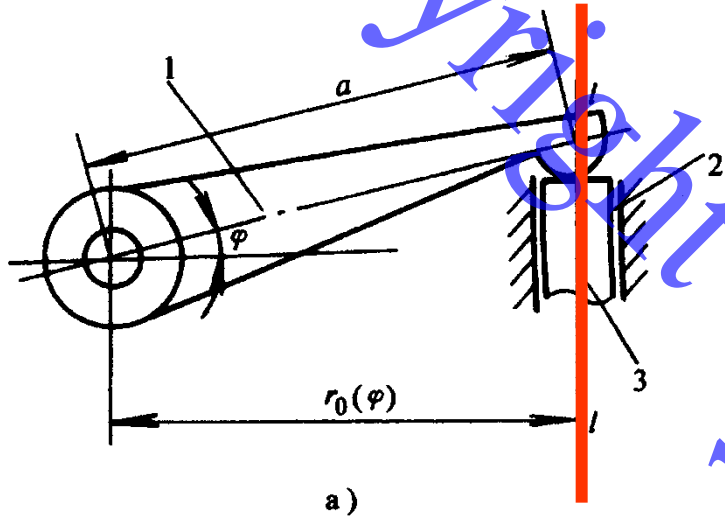
□ 作用线与位移线的区别

- ✍ 实际机构总是沿位移线方向传递移动
- ✍ 位移沿作用线传递只是一种假设的位移传递的中间过程
- ✍ 在多数情况下，作用线与位移线重合
- ✍ 在位移线与作用线不一致的特殊情况下，应注意将作用线上瞬时位移转换成位移线上的瞬时位移



作用线与瞬时臂法

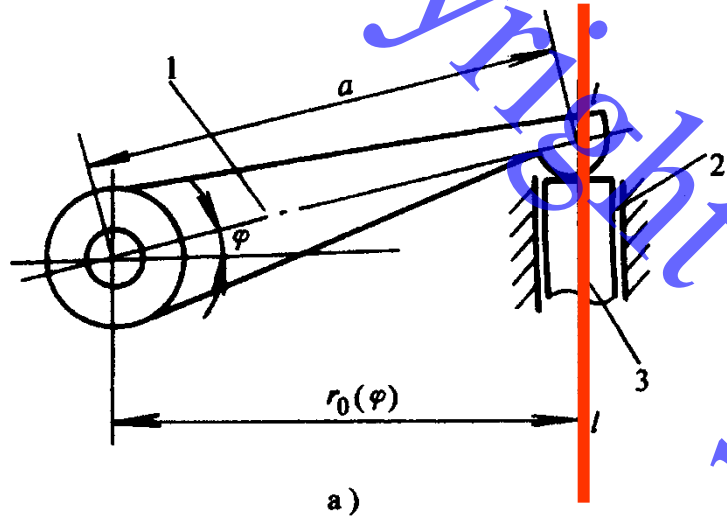
- 若把位移传递的过程看作是沿作用线传递的，位移沿作用线传递的基本公式：



$$dl = r_0(\varphi)d\varphi$$

作用线与瞬时臂法

□ 瞬时臂：转动件的瞬时回转中心至作用线 $l-l$ 的垂直距离



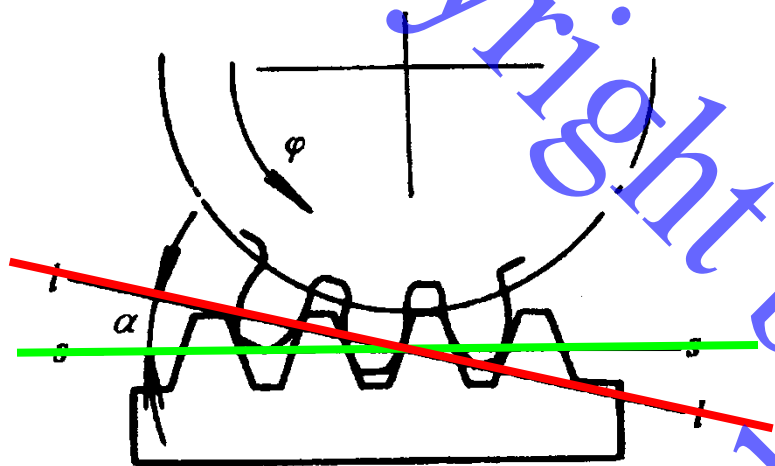
✍ 在某些运动副中，作用线 $l-l$ 的位置和方向是变动的

✍ 瞬时臂 $r_0(\varphi)$ 的大小和方向也是变动的，它们都是转角的函数

✍ 当然也有些运动副，如直尺圆盘运动副、齿轮运动副等，它们的作用线在传动过程中是固定不变的

$$dl = r_0(\varphi) d\varphi$$

作用线与瞬时臂法：齿轮齿条传动机构



□ 位移沿作用线传递的基本公式

$$dl = r_0(\varphi)d\varphi = r_0 \cos \alpha d\varphi$$

□ 当齿轮旋转 φ 角时，则位移沿作用线传递的方程

$$L = \int_0^{\varphi} r \cos \alpha d\varphi = r \cos \alpha \varphi$$

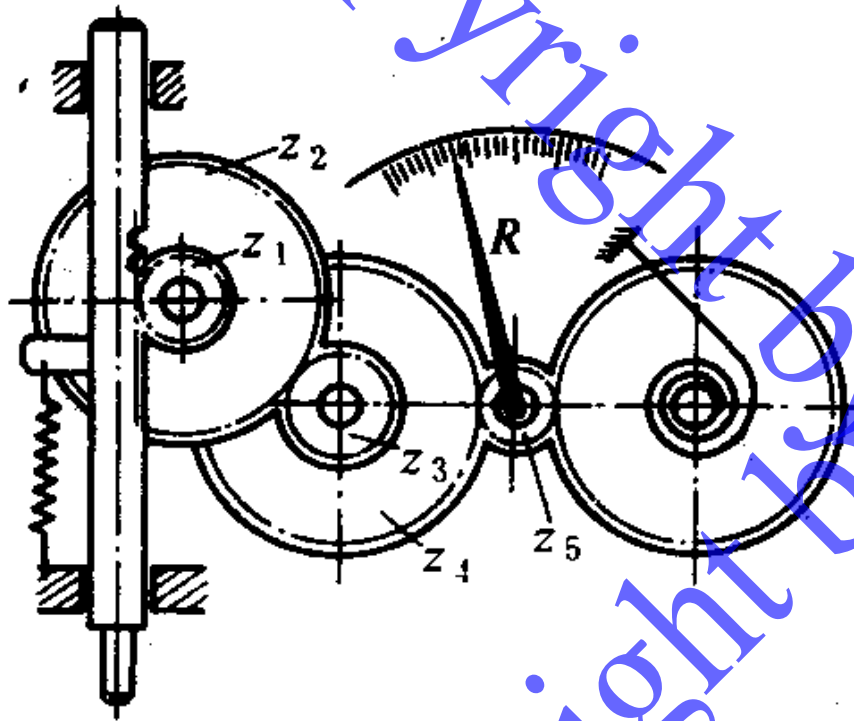
□ 位移线与作用线之间的几何关系

$$s = \frac{dl}{\cos \alpha}$$

□ 齿条位移方程

$$ds = \frac{dl}{\cos \alpha} = \frac{r \cos \alpha}{\cos \alpha} d\varphi = r d\varphi \quad S = \int_0^{\varphi} ds = \int_0^{\varphi} r d\varphi = r \varphi$$

作用线与瞬时臂法：运动副的作用误差



Working principle of 0.001 dial indicator

□ 在一对运动副上有许多源误差

Ex: 钟表式千分表的齿轮齿条，存在着齿轮的安装偏心误差、齿轮周节误差、齿形误差、齿条齿形误差等

□ 由于位移是沿作用线传递的，这些源误差对位移传递准确性的影响必然反映在作用线上，引起作用线上的附加位移。

作用线与瞬时臂法：运动副的作用误差

□ 作用误差

✍ 一对运动副上的一个源误差所引起的作用线上的附加位移

□ 运动副的作用误差

✍ 一对运动副上所有源误差引起的作用线上的附加位移的总和

✍ 运动副的作用误差是在运动副的作用线方向上度量源误差对该运动副位移准确性的影响

□ 计算作用误差的一般方法是依据源误差与作用线之间的关系把源误差折算到作用线上

作用线与瞬时臂法：运动副的作用误差

□ 计算作用误差的三种情况

- ✍ 源误差可以转换成瞬时臂误差时的作用误差计算
- ✍ 源误差的方向与作用线一致时的作用误差计算
- ✍ 源误差既不能折算成瞬时臂误差，其方向又不与作用线一致时的作用误差计算

作用线与瞬时臂法：运动副的作用误差

□ 源误差可以转换成瞬时臂误差时的作用误差计算

$$dl = r_0(\varphi)d\varphi$$

$$L|_0^\varphi = \int_0^\varphi r_0(\varphi)d\varphi$$

$$dl = (r_a + \delta_1 r_0)d\varphi$$

$$L|_0^\varphi = \int_0^\varphi (r_a + \delta_1 r_0)d\varphi$$

$$dl' = (r_0 + \delta_2 r_0)d\varphi$$

$$= (r_a + \delta_1 r_0 + \delta_2 r_0)d\varphi$$

$$L'|_0^\varphi = \int_0^\varphi (r_a + \delta_1 r_0 + \delta_2 r_0)d\varphi$$

$$\Delta F = \int_0^\varphi \delta_2 r_0 d\varphi$$



作用线与瞬时臂法：运动副的作用误差

□ 源误差的方向与作用线的方向一致时的作用误差计算

✍ 若源误差的方向与作用线方向一致，源误差就是作用误差

✍ **Ex:** 渐开线齿轮传动作用误差

✍ 齿轮运动副的作用线就是齿轮的啮合线

✍ 当齿轮转过一个齿时作用误差

$$\Delta F = \Delta J$$

✍ 当超过一个齿时，作用误差为

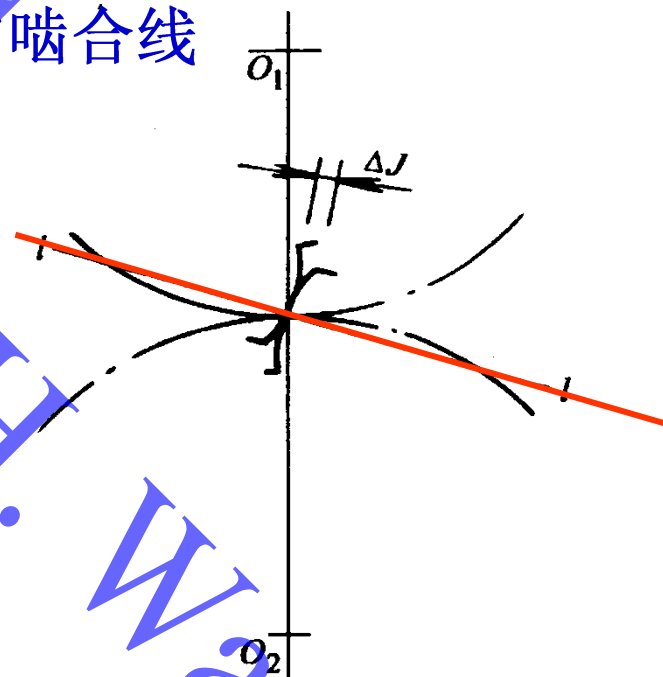
$$\Delta F = F_{PK} \cos \alpha + \Delta J$$

F_{PK}

K个齿的齿轮周节累积误差

$F_{PK} \cos \alpha$

K个齿的齿轮基节累积误差

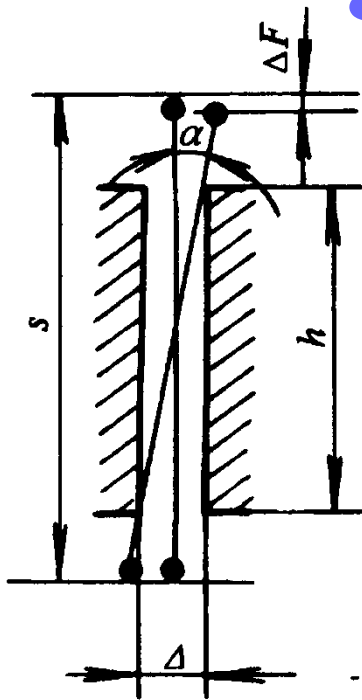


作用线与瞬时臂法：运动副的作用误差

❑ 源误差既不能折算成瞬时臂误差，其方向又不与作用线一致时的作用误差计算

✎ 很难用一个通式来计算作用误差，只能根据源误差与作用误差之间的几何关系或函数关系，将源误差折算到作用线上

✎ **Ex:** 测杆与导套之间的配合间隙所引起的的作用误差



$$\Delta F = s(1 - \cos \alpha) = \frac{s\alpha^2}{2}$$

$$\alpha = \frac{\Delta}{h}$$



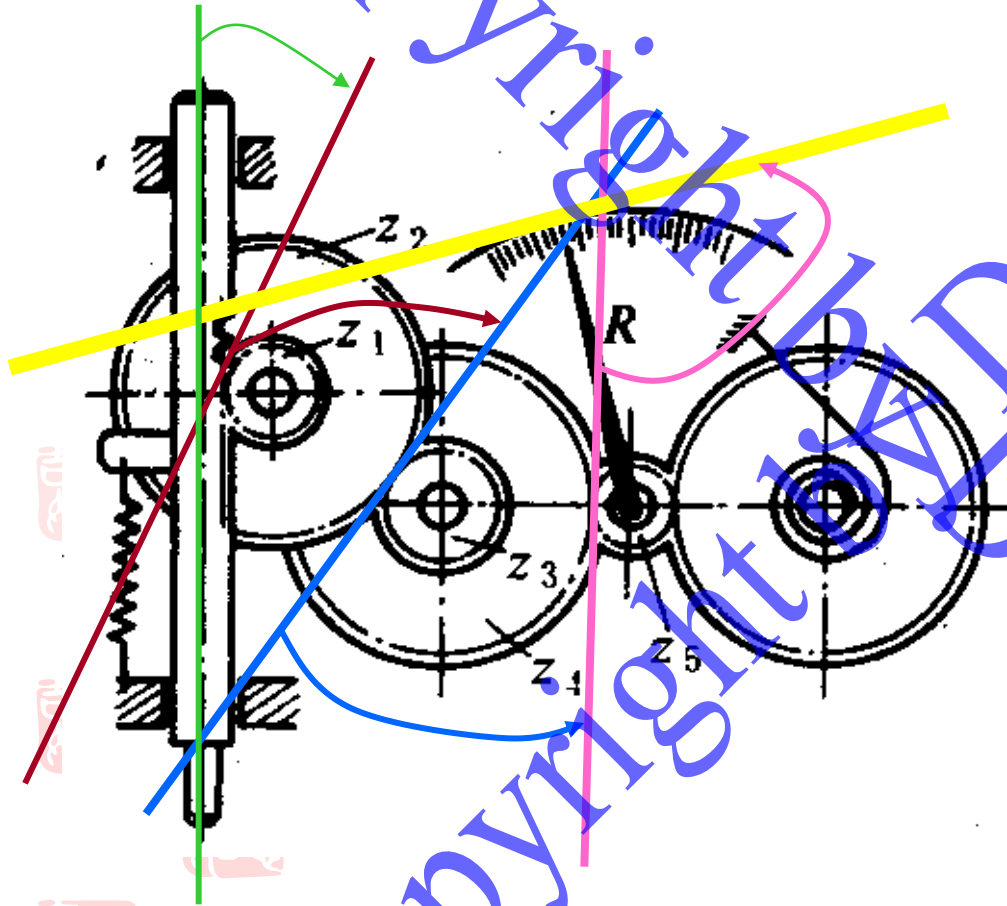
作用线与瞬时臂法：运动副的作用误差

- 对于一对运动副来说，大体上可以按照上面所述三种情况来计算作用误差，特别提示
 - ✍ 能转换成瞬时臂误差的源误差多发生在转动件上
 - ✍ 既不能换成瞬时臂误差，其方向又不与作用线方向一致的源误差多发生在平动件上
- 运动副的作用误差
 - ✍ 若一对运动副上有 m 个源误差，每个源误差均使其作用线上产生一个作用误差 ΔF_k ，该运动副的作用误差

$$\Delta F = \sum_{k=1}^m \Delta F_k$$

作用线与瞬时臂法

- 作用误差从一条作用线向另一条作用线的传递



Functional lines and its transmission of 0.001 dial indicator

作用线与瞬时臂法

□ 作用线之间传动比：作用线之间直线位移之比

$$i'_{na} = \frac{dl_n}{dl_a} = \frac{r_{0n}(\varphi_n)d\varphi_n}{r_{0a}(\varphi_a)d\varphi_a} = \frac{r_{0n}(\varphi_n)}{r_{0a}(\varphi_a)} i_{na}$$

两运动副之间
角位移传动比

□ 将第 **a** 对运动副的作用误差 ΔF_a 转换到第 **n** 条作用线上

$$\Delta F_{na} = i'_{na} \Delta F_a$$

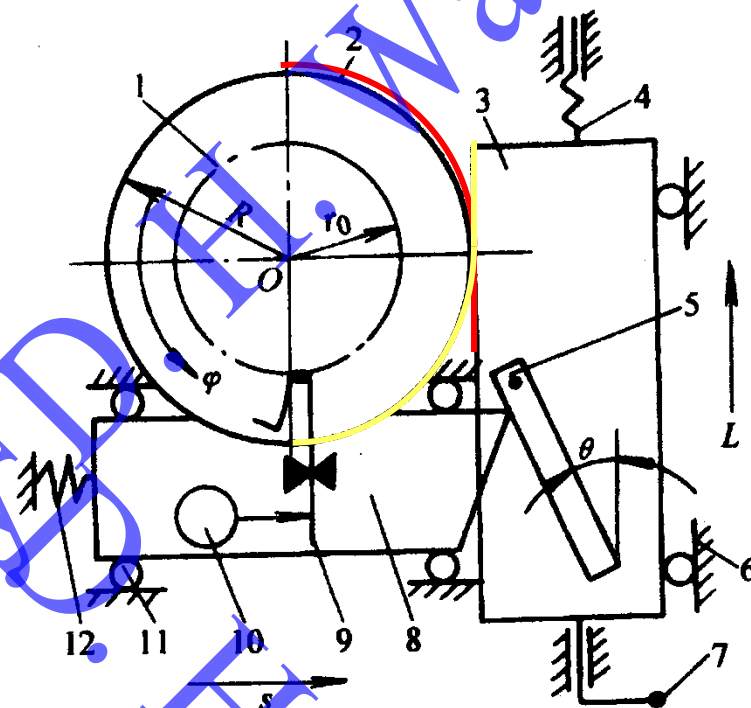
□ 若仪器机构由 **K** 对运动副组成，将 **K** 对运动副的作用误差转换到第 **K** 条作用线上

$$\overline{\Delta F} = \sum_{j=1}^K \Delta F_{Kj} = \sum_{j=1}^K i'_{Kj} \Delta F_j$$

□ 机构位移误差转换成测量端位移件的位移误差（如必要）

$$\overline{\Delta F} \Rightarrow \overline{\Delta S}$$

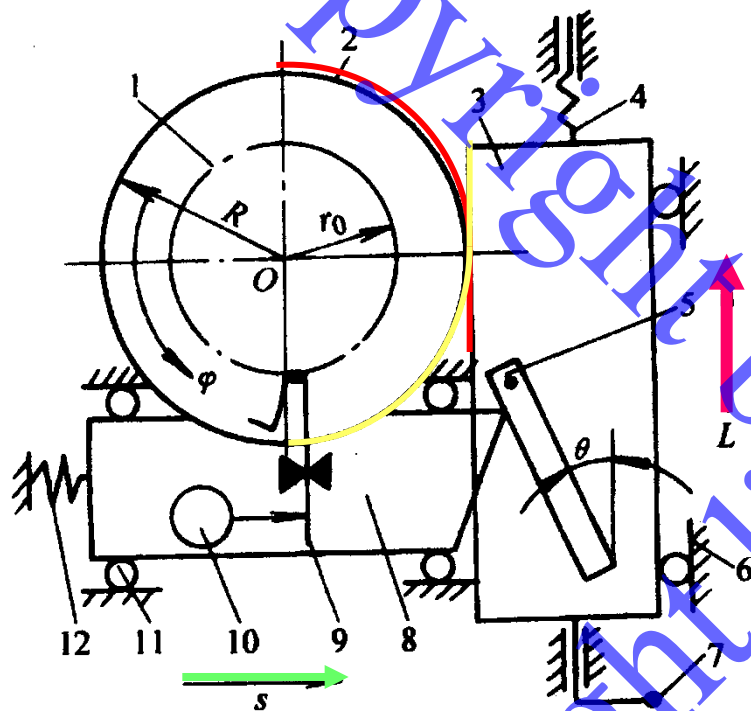
Ex: Error Analysis of UIMM



1-被测齿轮; 2-基圆盘; 3-主拖板; 4-传动丝杆; 5-直尺; 8-测量拖板; 9-测量杠杆

Working Principle of Universal Involute Measuring Machine (UIMM)

Ex: Error Analysis of UIMM: Measurement Principle



- 当主拖板在丝杠的带动下向上移动的距离为 L 时基圆盘旋转

$$\varphi = \frac{L}{R}$$

- 测量拖板的位移距离

$$s = L \tan \theta$$

$$\theta = \arctan \frac{r_0}{R}$$

$$s = L \tan \theta = L \frac{r_0}{R}$$

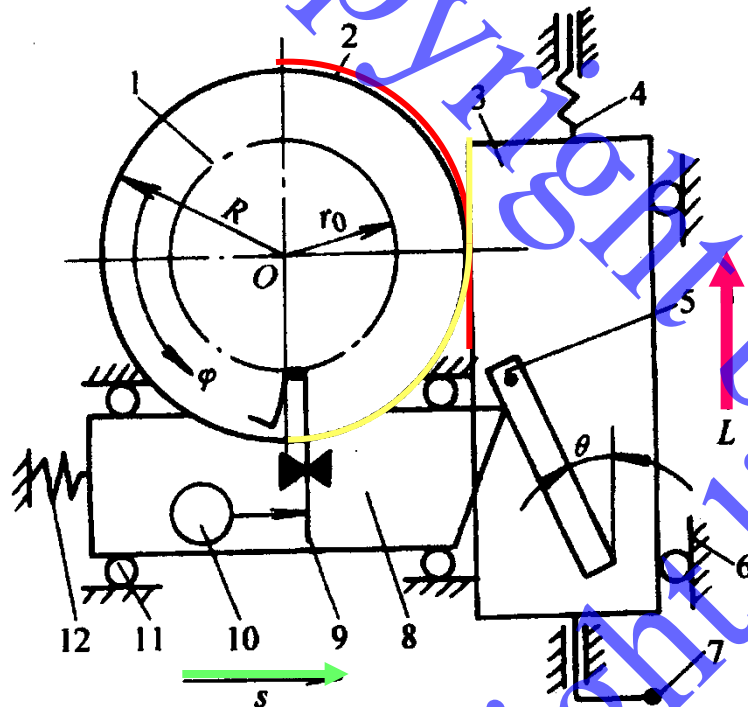
$$s = r_0 \varphi$$

Working Principle of Universal Involute Measuring Machine (UIMM)

- 若被测齿轮渐开线无误差，则被测齿形的展开长度为

$$l = r_0 \varphi$$

Ex: Error Analysis of UIMM: Measurement Principle



- ❑ 若被测齿轮渐开线有误差，则被测齿形的展开长度

$$l \neq r_0 \varphi$$

- ❑ 测量杠杆将有偏转，测微仪的输出为渐开线齿形误差

Standard Involute

$$\Delta s = l - s = l - r_0 \varphi$$

Measured Involute

Working Principle of Universal Involute Measuring Machine (UIMM)

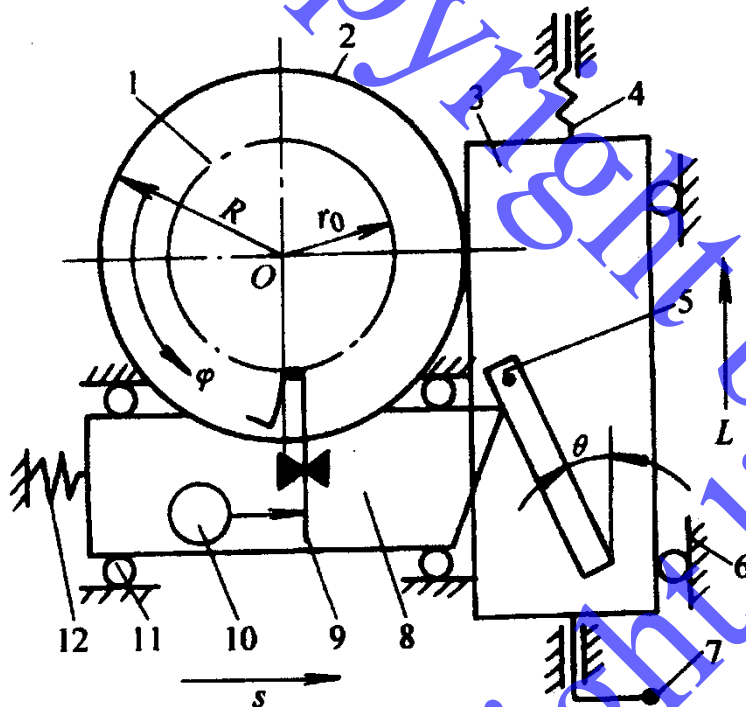
Ex: Error Analysis of UIMM: Measurement Principle

□ 渐开线齿形误差

Standard Involute

$$\Delta s = l - s = l - r_0 \varphi$$

Measured Involute



Working Principle of Universal Involute Measuring Machine (UIMM)

- 仪器的精度取决于所建立的标准渐开线位移的准确性。
- 由于仪器的测量链较长，影响标准渐开线位移精度的源误差也很多，因此，如果没有一些必要的措施，渐开线位移的准确性难以保证。

Ex: Error Analysis of UIMM: Case Study

□ 怎样分析存在下述源误差所引起的测量拖板的位移误差

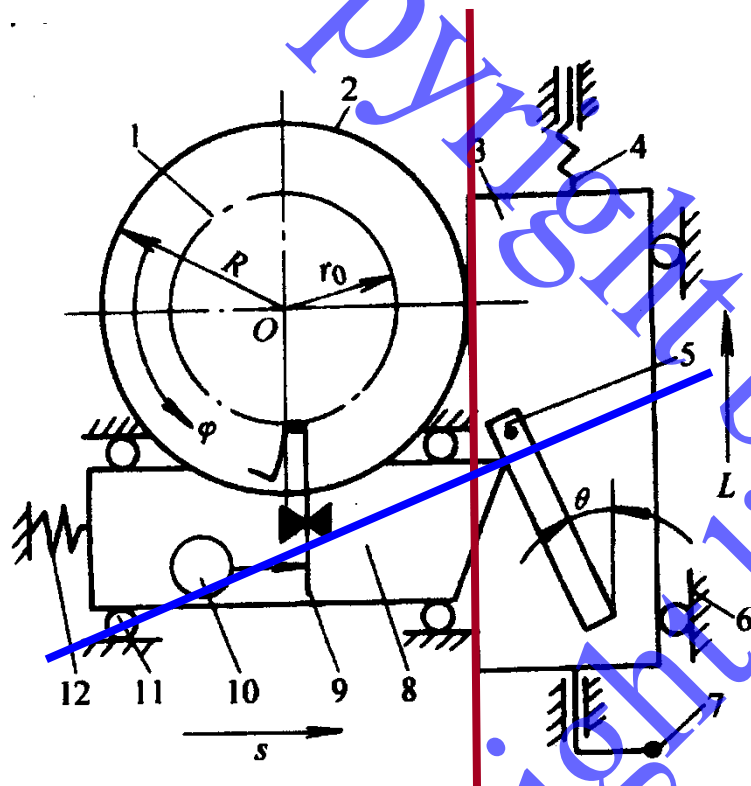
✎ 基圆盘安装偏心误差

✎ 基圆盘半径误差

✎ 直尺表面直线度误差

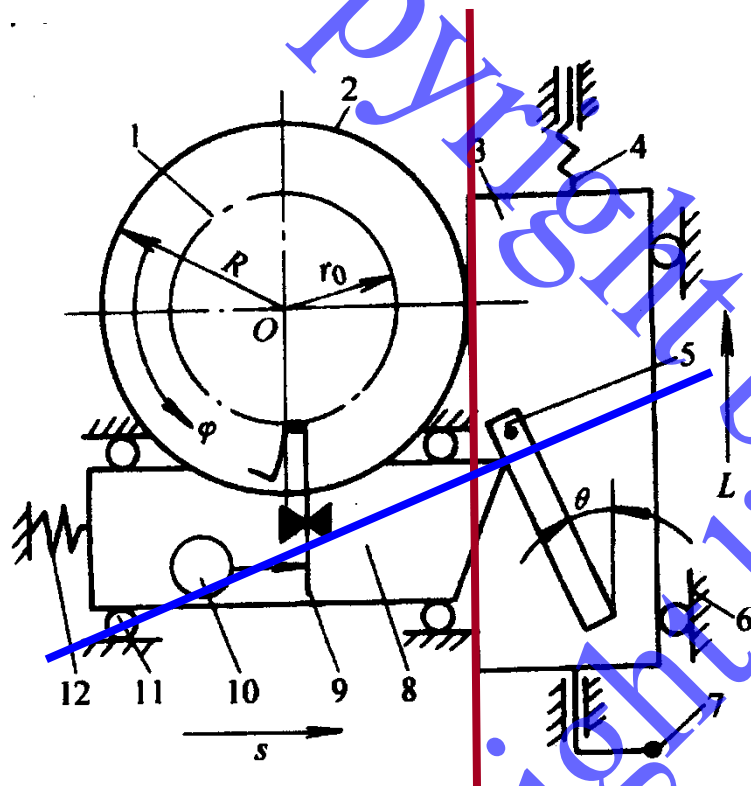
✎ 直尺倾斜角度的调整误差

✎ ...



**Working Principle of Universal
Involute Measuring Machine
(UIMM)**

Ex: Error Analysis of UIMM: Case Study



Working Principle of Universal Involute Measuring Machine (UIMM)

□ 运用作用线与瞬时臂法

□ 基本考虑

✍ 把基圆盘与主拖板运动副看成是直尺与圆盘运动副，为摩擦力传动

✍ 基圆盘 2 为主动件、主拖板 3 为从动件

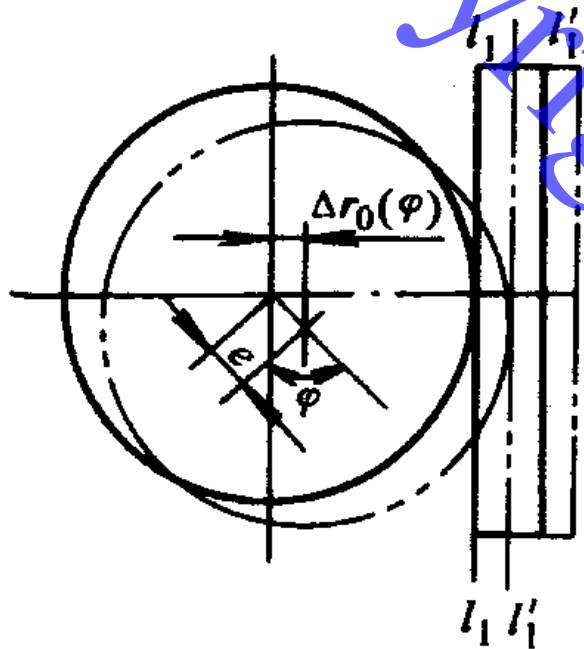
✍ 视直尺 5 与测量拖板 8 运动副为推力传动

✍ 直尺为主动件、测量拖板为从动件

Ex: Error Analysis of UIMM: Case Study

□ 基圆盘与主拖板运动副的作用误差

✍ 基圆盘安装偏心误差 e 引起的作用误差



$$\delta r_0(\varphi) = e \sin \varphi \quad \text{--- 瞬时臂误差}$$

$$\Delta F_e = \int_0^\varphi \delta r_0(\varphi) d\varphi = \int_0^\varphi e \sin \varphi d\varphi = e(1 - \cos \varphi)$$

✍ 基圆盘半径误差 ΔR 引起的作用误差

$$\delta r_0(\varphi) = \Delta R \quad \text{--- 瞬时臂误差}$$

$$\Delta F_R = \int_0^\varphi \delta r_0(\varphi) d\varphi = \int_0^\varphi \Delta R d\varphi = \Delta R \varphi$$

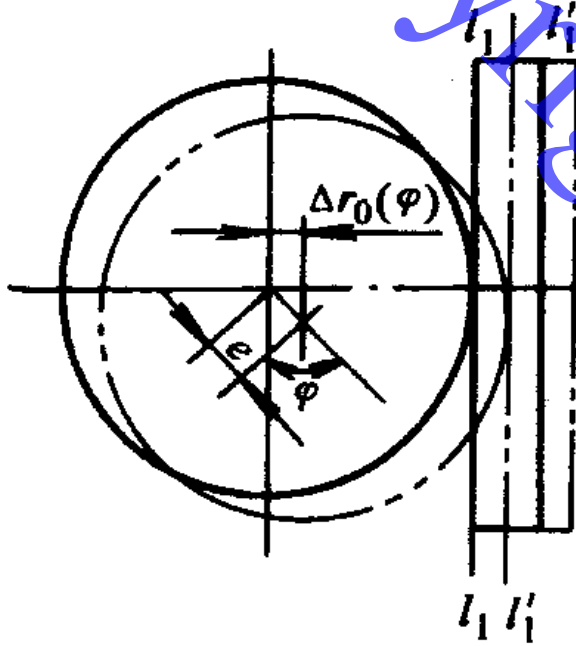
Ex: Error Analysis of UIMM: Case Study

□ 基圆盘与主拖板运动副的作用误差

✍ 基圆盘安装偏心误差 e 引起的作用误差

✍ 基圆盘半径误差引起的作用误差

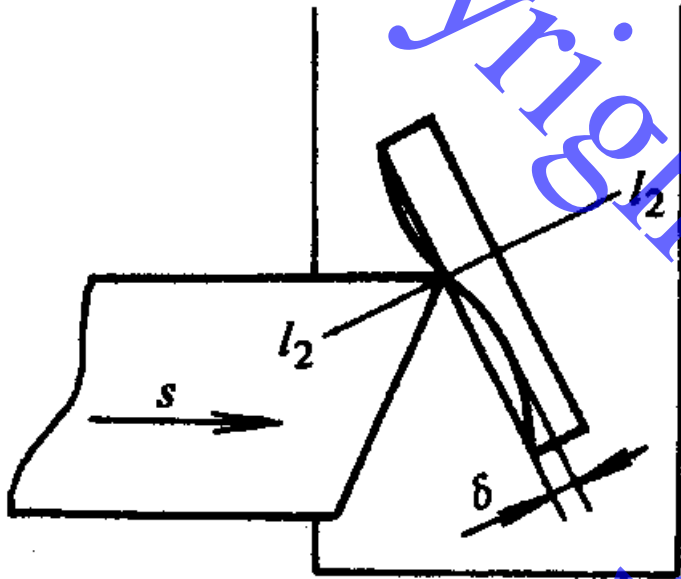
✍ 该运动副上的作用误差



$$\Delta F_1 = \Delta F_e + \Delta F_R = 2e + \Delta R\varphi$$

Ex: Error Analysis of UIMM: Case Study

□ 求直尺与测量拖板运动副的作用误差



✍ 直尺直线度所引起的作用误差

✍ 直尺直线度误差与作用线方向相同，则其所引起的作用误差为

$$\Delta F_{\delta} = \delta$$

✍ $\Delta\theta$ 所引起的作用误差

✍ Next Slide ...

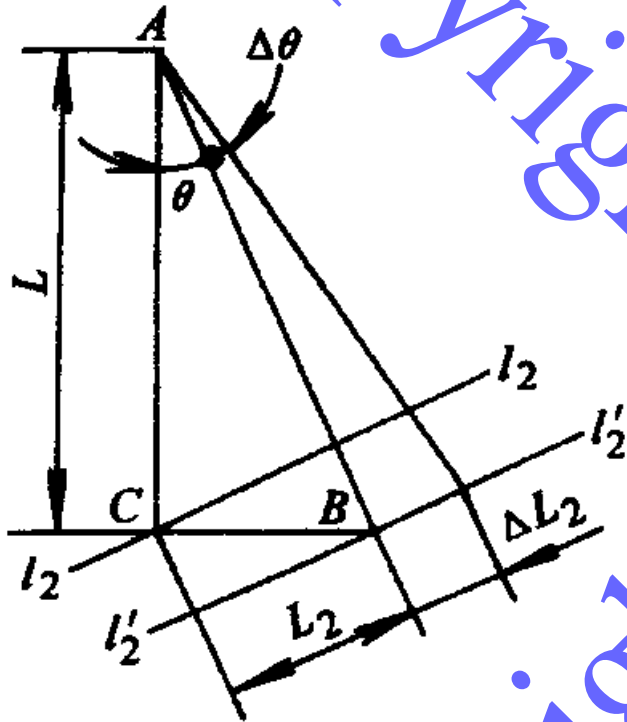
Ex: Error Analysis of UIMM: Case Study

□ 直尺与测量拖板运动副的作用误差

✍ 直尺直线度所引起的作用误差

✍ $\Delta\theta$ 所引起的作用误差

✍ 直尺倾斜角调整误差既不能转换成瞬时臂误差，也不与作用线方向相同，只能用几何法将其折算成作用误差



$$\Delta L_2 = AB\Delta\theta = \frac{L}{\cos\theta} \Delta\theta = \Delta F_\theta$$

□ 直尺与测量拖板运动副的作用误差

$$\Delta F_2 = \Delta F_\delta + \Delta F_\theta = \delta + \frac{L}{\cos\theta} \Delta\theta$$

Ex: Error Analysis of UIMM: Case Study

■ 作用线12-12方向上的总作用误差

$$\Delta F = \Delta F_2 + i'_{21} \Delta F_1$$

□ 作用线 l_2-l_2 与 l_1-l_1 的直线传动比

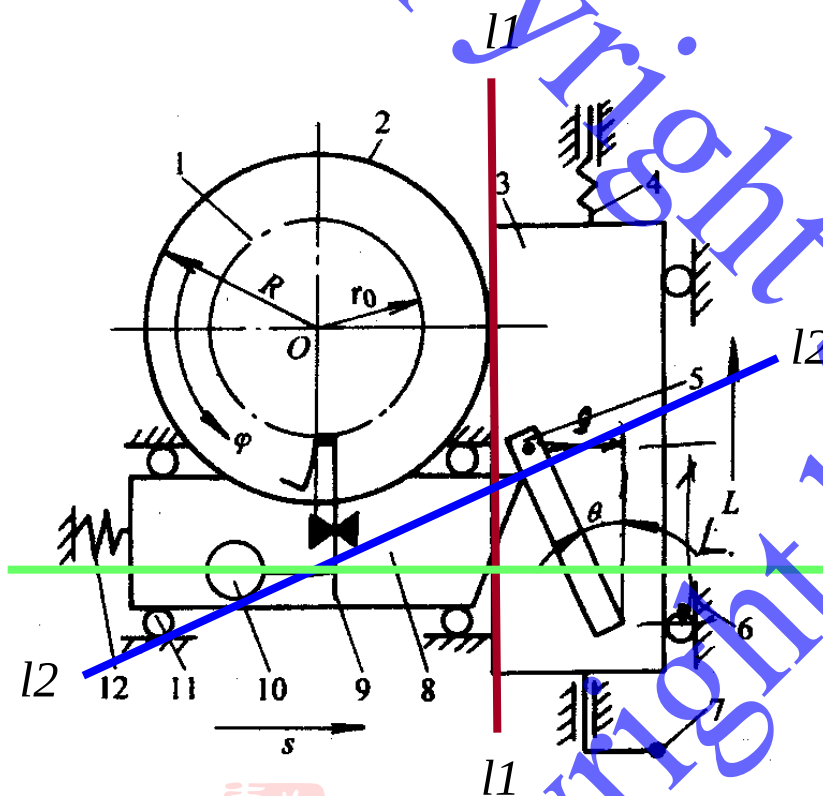
$$i'_{21} = \frac{dl_2}{dl_1} = \frac{dl_1 \sin \theta}{dl_1} = \sin \theta$$

□ 作用线12-12方向上的总误差为

$$\Delta F = \delta + \frac{L}{\cos \theta} \Delta \theta + (2e + \varphi \Delta R) \sin \theta$$

测量拖板的位移误差

$$\Delta s = \frac{\Delta F}{\cos \theta} = \frac{\delta}{\cos \theta} + \frac{R\varphi}{\cos^2 \theta} \Delta \theta + (2e + \varphi \Delta R) \tan \theta$$



Mathematical Fitting Method

- ❑ Mathematical Fitting Method is an effective method to analysis the principle errors of instruments.
- ❑ To analysis the principle errors of instruments, the key problem is to obtain the actual relationship between the output and input of an instrument.

Principle error =

***actual relationship between the output and input –
ideal relationship between the output and input***

- ❑ How to determine the actual relationship between the output and input of an instrument?

 **Next slide ...**

Mathematical Fitting Method

❑ How to determine the actual relationship between the output and input of an instrument?

✍ **Theoretical analysis**

✍ **Design stage**

✍ **Experimental measurement and data fitting**

✍ **Manufacturing and evaluation stage**

❑ How to determine the actual relationship between the output and input of an instrument according the measurement data?

✍ **Mathematical fitting**



Mathematical Fitting Method

❑ The problem of fitting a mathematical model to a set of measurements is common among many disciplines.

✍ **In precision engineering, the model may**

- ✍ provide compensation for errors in a machine
- ✍ separate feature errors from a part's ideal shape
- ✍ help diagnose systematic errors in a machine and/or process

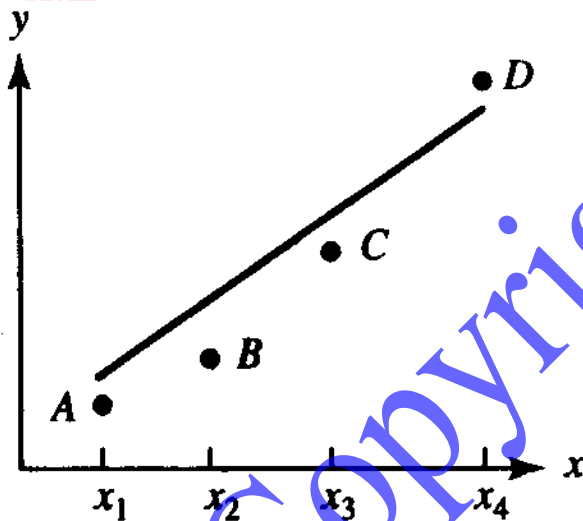
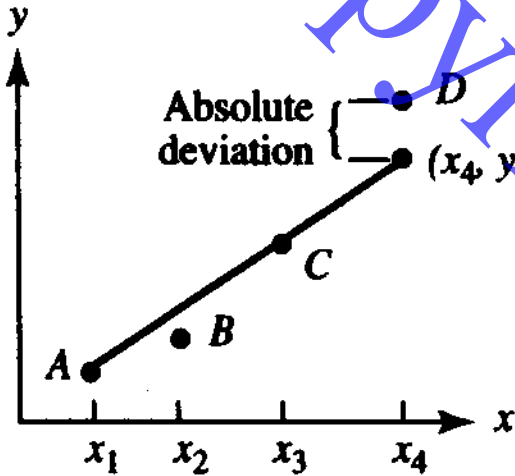
❑ The model could be static or dynamic and consist of nearly any mathematical function chosen by the user.

Mathematical Fitting Method

- The fitting process determines the values of model parameters that minimize a scalar measure of the residual errors between the fit and the measurements.

✍ For least-squares fitting, the measure is the sum of squared errors otherwise known as the L2 norm of the error vector.

✍ Other measures of practical interest are the sum of absolute values (the L1 norm) and the peak-to-valley error (the L^∞ norm).



Mathematical Fitting Method: Least-Squares Fitting

- ❑ The least-squares technique is the most tractable mathematically and arguably provides the best fit to a set of measurements.
- ❑ The least-squares solution gives the maximum likelihood estimation of the fitted parameters when the measurement errors are independent and normally distributed with equal standard deviations [Press et al., 1992].
- ❑ For example, if the model is a constant, then the least-squares solution is the average of the measurements.

Mathematical Fitting Method: Least-Squares Fitting

- ☐ Linear fitting
- ☐ *Polynomial least-squares*
- ☐ Nonlinear least-squares
- ☐ Planar fit
- ☐ Spherical fit
- ☐ Fitting surfaces of revolution
- ☐ Cylindrical fit
- ☐ Conical fit
- ☐ Fitting a general-form revolution
- ☐ Fitting quadratic surfaces
- ☐ Fitting cubic Splines



Least-Squares Fitting: Linear Regression

- ❑ The most familiar example is linear regression where the model is the equation of a line (a linear model)

$$y = ax + b$$

- ❑ The following Equation shows n such equations for n measurements. It requires a vector of errors to account for the y -distance that the (x, y) data points differ from the straight line

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{e}$$

Least-Squares Fitting: Polynomial Least-Squares

❑ Choosing a best model

$$y = f_0(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

❑ To use a collection of m data points (y_i, x_i) ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) to estimate the coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$

❑ Applying the least-squares criterion to this situation requires the minimization of

$$\varepsilon(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m) = \sum_{i=1}^n [y_i - f_0(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n \left[y_i - \sum_{j=0}^m \hat{a}_j x_i^j \right]^2$$

Least-Squares Fitting: Polynomial Least-Squares

$$\text{MIN } \varepsilon(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m) = \text{MIN } \sum_{i=1}^n [y_i - f_0(x_i)]^2 = \text{MIN } \sum_{i=1}^n \left[y_i - \sum_{j=0}^m \hat{a}_j x_i^j \right]^2$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^m \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2m} \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

□ How to solve the above equation systems?

Least-Squares Fitting: Polynomial Least-Squares

□ $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_m$ is the estimation of $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$

□ The actual relationship of output and input of an instrument

$$y = f_0(x) = \sum_{j=0}^m \hat{a}_j x^j$$

□ How to determine the principle errors of an instrument?

Least-Squares Fitting: Polynomial Least-Squares

□ **Ex:** 表2-1为用于测量标准的某一电阻温度(18-22℃)传感器静态标定实验数据组(U_i, t_i) ($i=0,1,\dots,6$), t_i 为温度, U_i 为温度传感器输出电压。在此,以三次多项式拟合该温度传感器的特性方程。

□ 表2-1 测温传感器静态标定实验数据

	0	1	2	3	4	5	6
温度 $t_i/^\circ\text{C}$	17.03	18.01	19.02	20.00	21.00	22.00	23.00
电压 U_i/mV	-0.17054	0.12556	0.41592	0.69679	0.97324	1.24212	1.50351

□ 将电压作为输入,温度作为输出,由标定数据用计算机求解线性方程组,得静特性方程系数。温度传感器静特性方程为

$$t = f(U) = -17.59456 + 3.34696 U + 0.14410 U^2 + 0.01379 U^3$$

Error Analysis of Control Systems

- ❑ 仪器控制系统从功能上看通常由测量装置、比较元件、放大系统、校正装置以及执行机构组成，其每一种功能都可以用传递函数来表达。
- ❑ 控制系统受两种信号作用

测量元件(传感器)所提供的测量信号

-  决定系统被控制量的变化规律

扰动

-  系统不希望的干扰，它破坏系统对输出信号的控制

Error Analysis of Control Systems

□ 在实际系统中，扰动总是不可避免的，可以作用于系统的任何部位

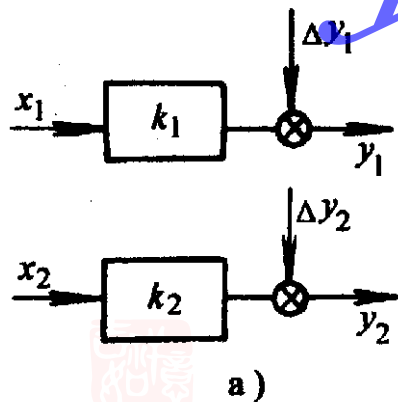
✍ **Ex:** 电源电压的波动、环境温度、压力变化以及负载的变化等，都是现实中存在的扰动，它们对系统的影响是使各个环节的输出信号产生偏移，最终引起控制系统的输出误差

□ 控制系统的各个环节在制造和安装过程中的误差，将引起每个环节输出的正确性，同样影响控制系统输出的精度

✍ **Ex:** 电器元件参数的非理想性、电路微小参数的忽略等

Error Analysis of Control Systems

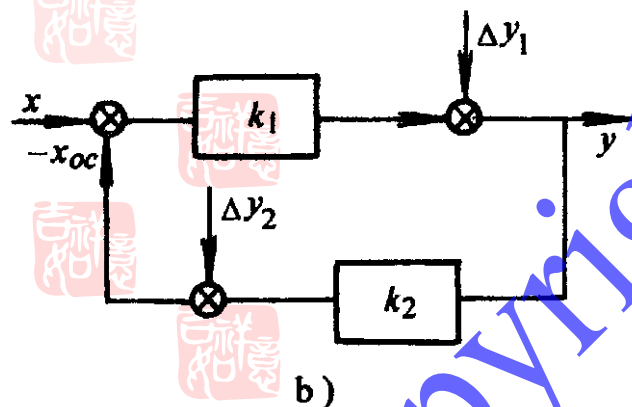
- 闭环反馈控制系统，各环节的输出信号



$$y_1 = x_1 k_1 + \Delta y_1$$

$$y_2 = x_2 k_2 + \Delta y_2$$

- 按被测量偏差的闭环负反馈控制系统

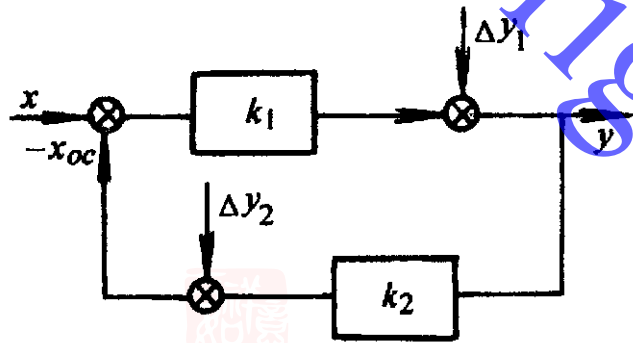


以第一环节构成控制系统主回路，第二环节变成包容第一环节的负反馈耦合

- 控制系统的误差

$$e = x - x_{oc} \text{ or } e = x - y$$

Error Analysis of Control Systems



□ 仪器总的静态误差可以看作是两环节所带来的误差之和

$$e = \Delta y' + \Delta y''$$

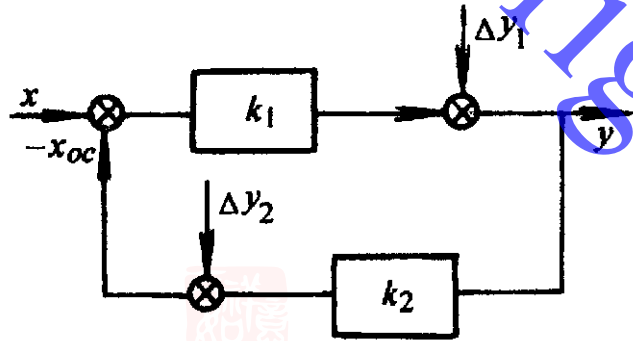
$\Delta y'$ 为由第一环节源误差 Δy_1 所引起的系统输出误差

$$\Delta y' = \Delta y_1 - \Delta y' k_1 k_2 \quad \Delta y' = \frac{\Delta y_1}{1 + k_1 k_2}$$

$\Delta y''$ 为由第二环节(反馈环节)源误差 Δy_2 所引起的系统输出误差

$$\Delta y'' = -\Delta y_2 k_1 - \Delta y'' k_1 k_2 \quad \Delta y'' = -\frac{\Delta y_2 k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Error Analysis of Control Systems



- 如果源误差 Δy_1 和 Δy_2 是系统误差，按偏差负反馈系统的静态系统误差

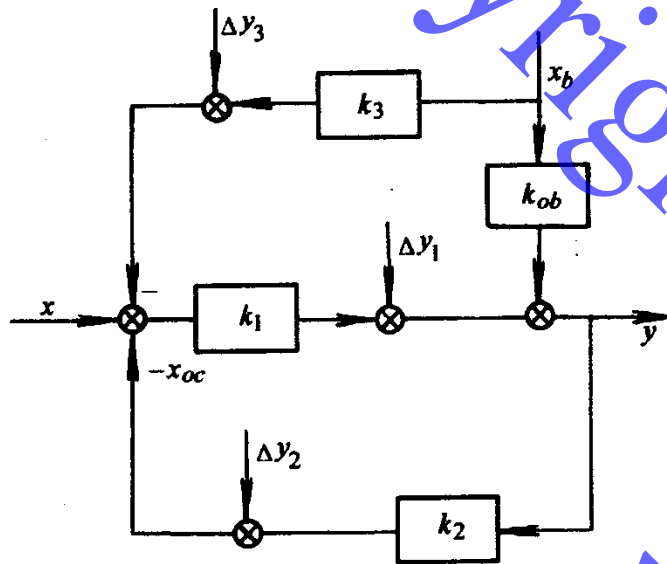
$$e_x = \frac{\Delta y_1 - k_1 \Delta y_2}{1 + k_1 k_2}$$

- 如果源误差 Δy_1 和 Δy_2 是随机误差，按偏差负反馈系统的静态随机误差

$$e_s = \frac{\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (k_1 \Delta y_2)^2}}{1 + k_1 k_2}$$

Error Analysis of Control Systems

带扰动补偿器的控制系统



在控制环路中接入干扰补偿回路，直接或间接地测出干扰信号，经过适当配置或变换之后，使干扰补偿通道的传递函数与干扰通道传递函数相等

$$x_b k_{ob} = x_b k_3 k_1$$

仪器总的静态误差

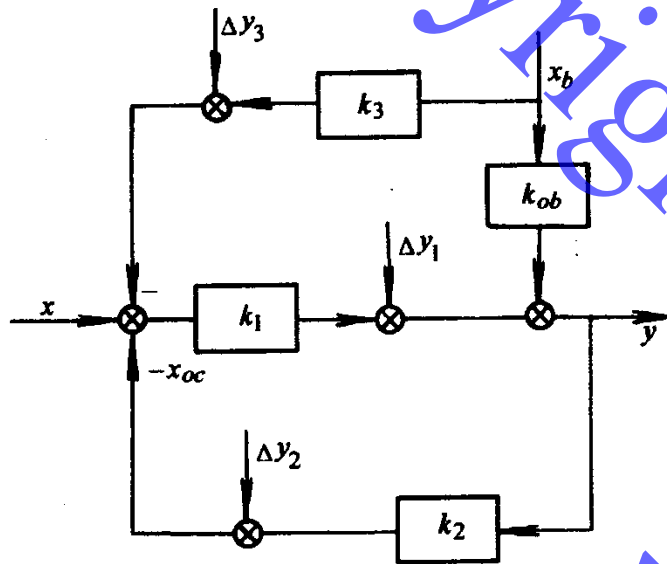
$$e = \Delta y' + \Delta y'' + \Delta y'''$$

利用误差独立作用原理

$$\Delta y''' = -\Delta y_3 k_1$$

Error Analysis of Control Systems

□ 如果源误差为系统性的，控制系统静态系统误差



$$e_x = \frac{\Delta y_1 - k_1 \Delta y_2}{1 + k_1 k_2} - \Delta y_3 k_1$$

□ 如果源误差为随机性的，那么控制系统静态随机误差

$$e_s = \sqrt{\frac{(\Delta y_1)^2 + (k_1 \Delta y_2)^2}{(1 + k_1 k_2)^2} + (k_1 \Delta y_3)^2}$$

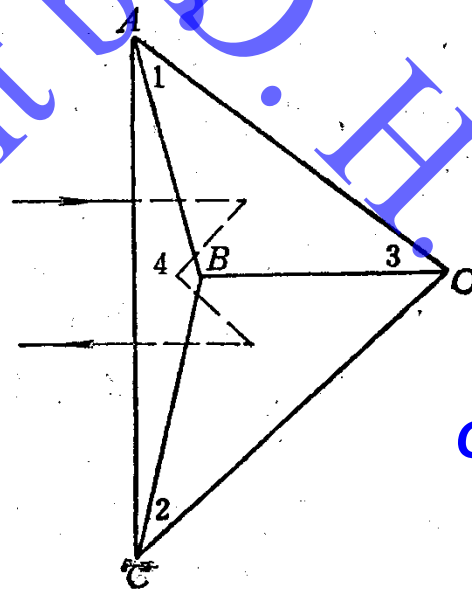
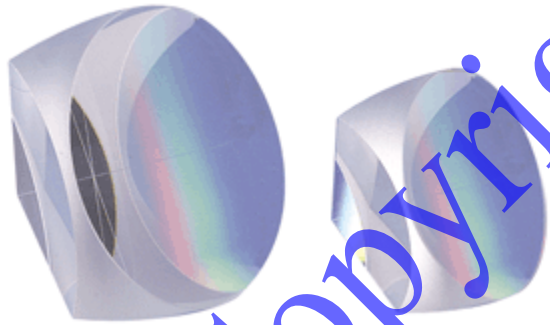
Vector Algebra

□ 矢量代数法

✍ 分析仪器光学系统中棱镜、反射镜的空间位置误差对仪器精度的影响

✍ 用在其它一些适合于用矢量代数法进行误差分析的场合

□ Ex: 分析角锥棱镜 (**Corner Cuber Prism**) 的直角误差对出射入射光线平行度的影响



Corner Cuber Prism

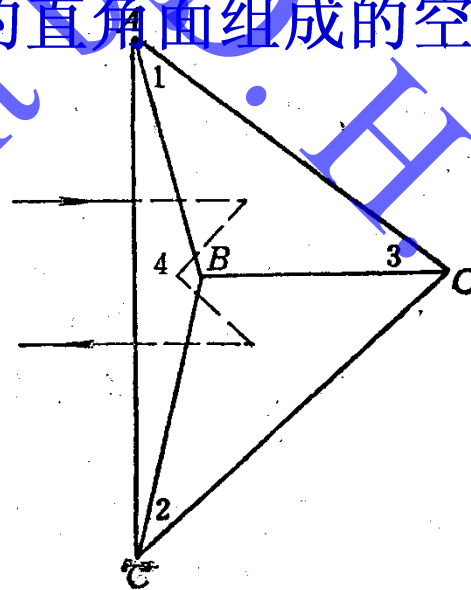
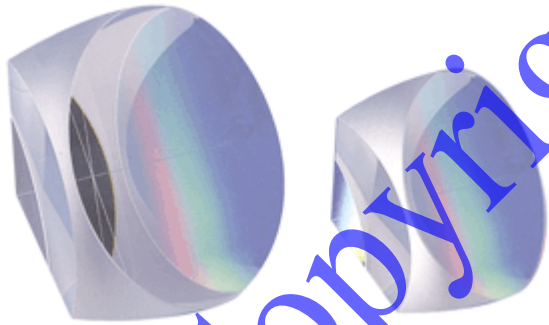
Vector Algebra

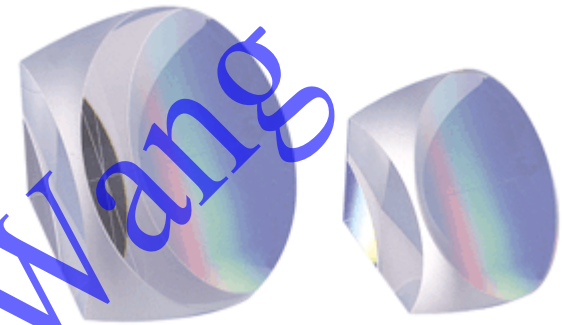
❑ 角锥棱镜 (Corner Cuber Prism)

✍ 在玻璃正方体上切一角，得到一个由 **3** 个直角面和 **1** 个底面组成的 **4** 面体，把这个 **4** 面体的 **3** 个直角面作为反射面，光线从底面入射，射入 **4** 面体内的光线将在各个直角面上依次反射，最后仍穿过底面射出。

从玻璃正方体上切下的一个角，是实体的角锥棱镜

 由 **3** 个相互垂直的直角面组成的空心棱镜 (无第四面)



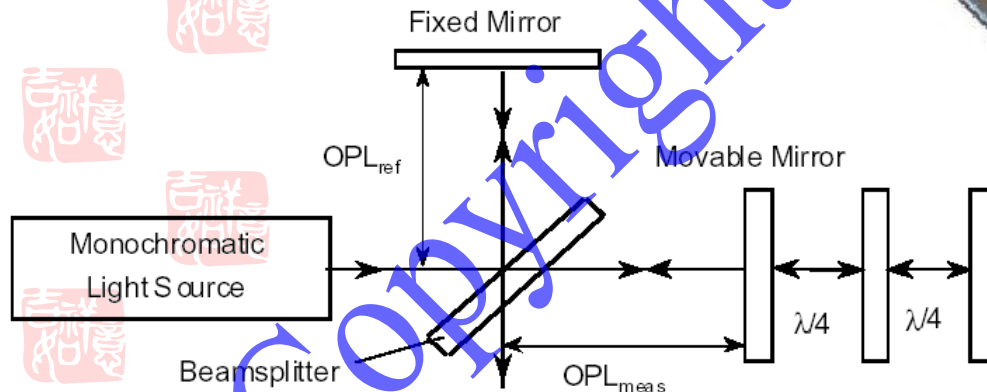
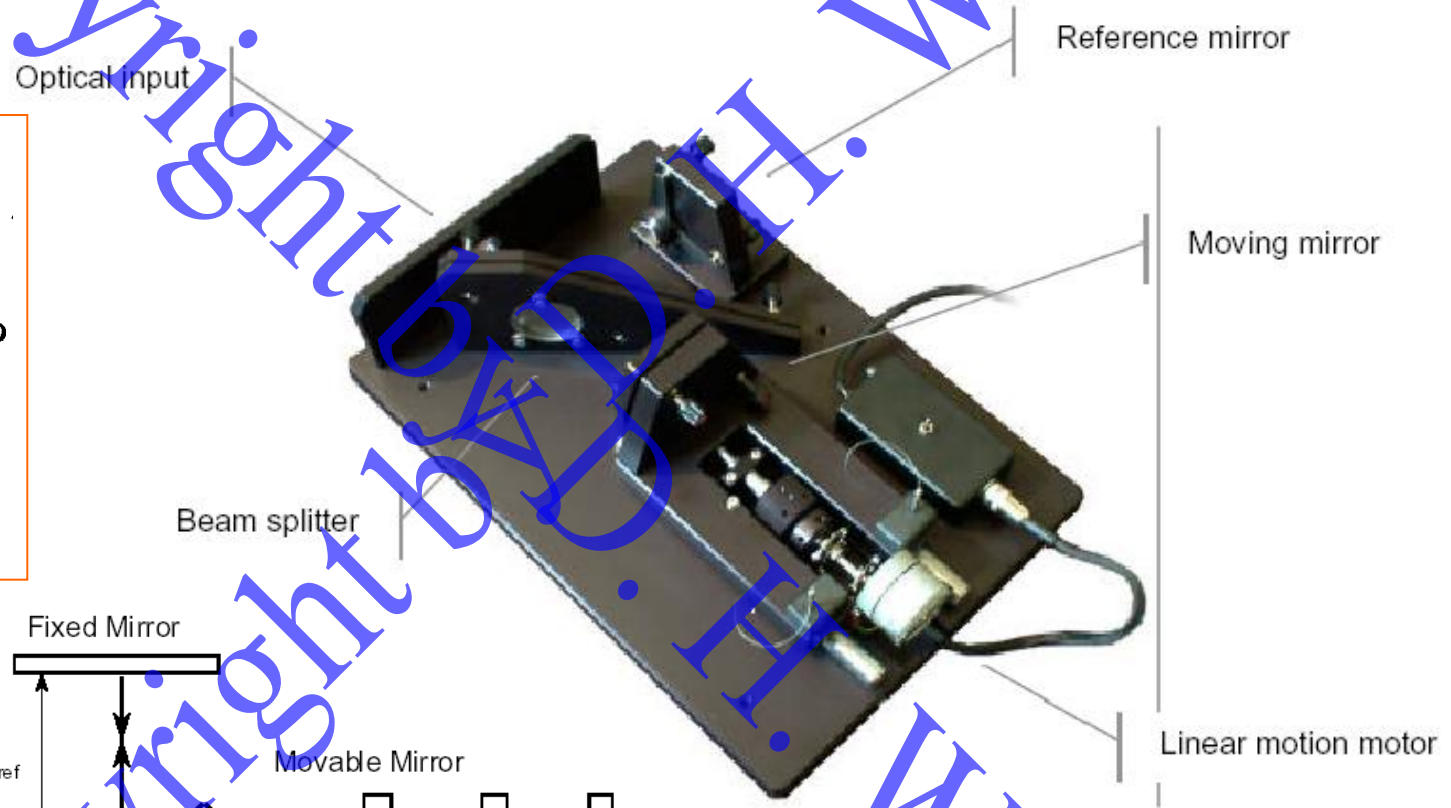
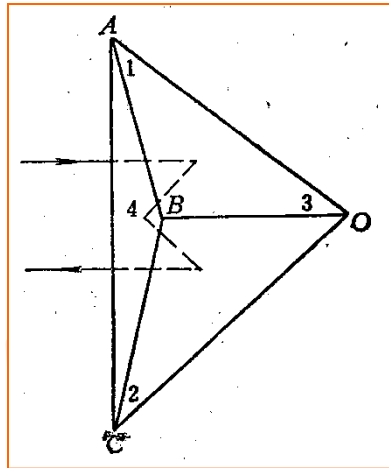


□ 角锥棱镜的主要反射特性

- ✍ 当光从棱镜的底面入射，在 **3** 个直角面上依次反射并从底面射出，出射光线与入射光线平行，但方向相反
- ✍ 不管入射光线沿与底面的法线成何种角度入射，只要光线在 **3** 个直角面上依次反射并从底面射出，在沿着入射光线的方向向角锥棱镜看去的视图中，入射点和出射点相对于角锥棱镜的顶点 **O** 呈中心对称
- ✍ 不管光线从底面的哪个部位正入射，也不管它在角锥棱镜内部如何反射，光线在棱镜内部的光程是恒定的，等于角锥棱镜高度的 **2** 倍

Vector Algebra

角锥棱镜的应用示例

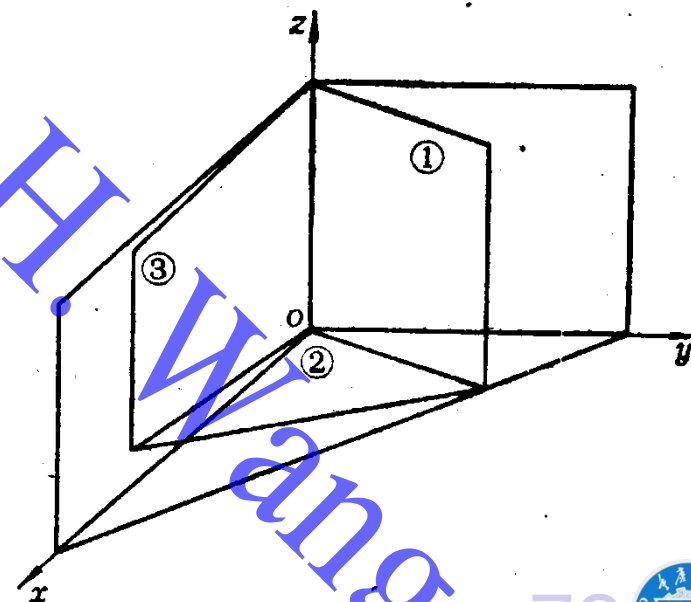
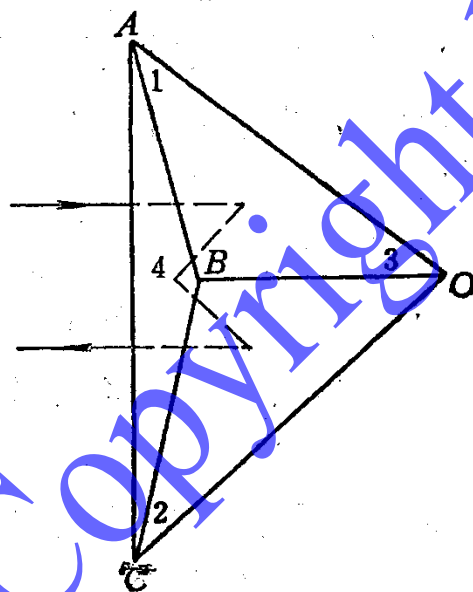


Vector Algebra: Application

□ 当角锥棱镜的 3 个垂直面的直角有偏差时，出射光线将不再平行入射光线

□ 问题？

✍ 分析 3 个直角偏差 α 、 β 、 γ 和出射光线对入射光线平行度偏角 δ 之间的关系



Vector Algebra

□ 假设

✍ 角锥棱镜的3个直角面理想，而3个垂直面的直角有误差

✍ 反射面①、②、③的单位法向量为 N_1 、 N_2 、 N_3 指向面内

✍ ①面与③面夹角为 $90^\circ - \gamma$

✍ ①面与 oyz 面的夹角为 $\gamma/2$

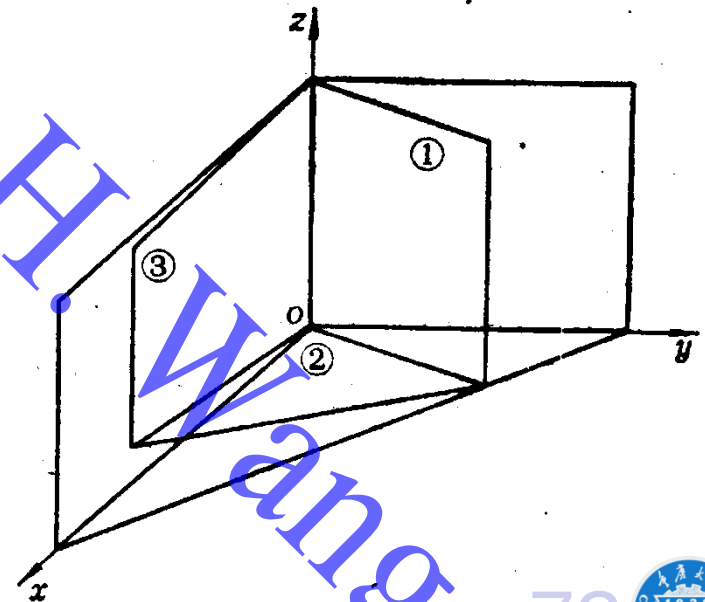
✍ ③面与 oxz 面的夹角亦为 $\gamma/2$

✍ ①面与②面的夹角为 $90^\circ - \alpha$

✍ 故法线 N_1 与 N_2 的夹角为 $90^\circ + \alpha$

✍ ②面与③面的夹角为 $90^\circ + \beta$

✍ 故法线 N_2 与 N_3 的夹角为 $90^\circ - \beta$



Vector Algebra

$$N_1 = i \cos \frac{\gamma}{2} + j \cos \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2} \right) + k \times 0$$

$$= i \cos \frac{\gamma}{2} - j \sin \frac{\gamma}{2}$$



$$N_1 = i - \frac{\gamma}{2} j$$

$$N_3 = i \cos \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2} \right) + j \cos \frac{\gamma}{2} + k \times 0$$

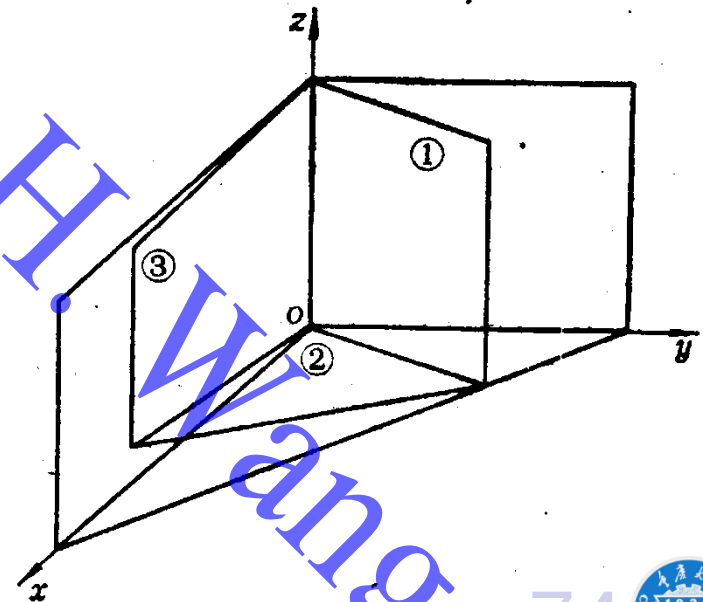


$$N_3 = -\frac{\gamma}{2} i + j$$

Let $N_2 = xi + yj + zk$

$$N_1 \cdot N_2 = \left(i - \frac{\gamma}{2} j \right) \cdot (xi + yj + zk)$$

$$= x - \frac{\gamma}{2} y$$



Vector Algebra

$$N_1 \cdot N_2 = \left(\mathbf{i} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{j} \right) \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

$$= x - \frac{\gamma}{2} y$$

$$N_1 \cdot N_2 = |N_1| \cdot |N_2| \cos(\angle N_1, N_2)$$

$$= \cos(90^\circ + \alpha) \approx -\alpha$$

$$N_2 \cdot N_3 = \left(-\frac{\gamma}{2} \mathbf{i} + \mathbf{j} \right) \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

$$= -\frac{\gamma}{2} x + y$$

$$N_2 \cdot N_3 = |N_2| \cdot |N_3| \cos(\angle N_2, N_3)$$

$$= \cos(90^\circ - \beta) \approx \beta$$

$$x - \frac{\gamma}{2} y = -\alpha$$

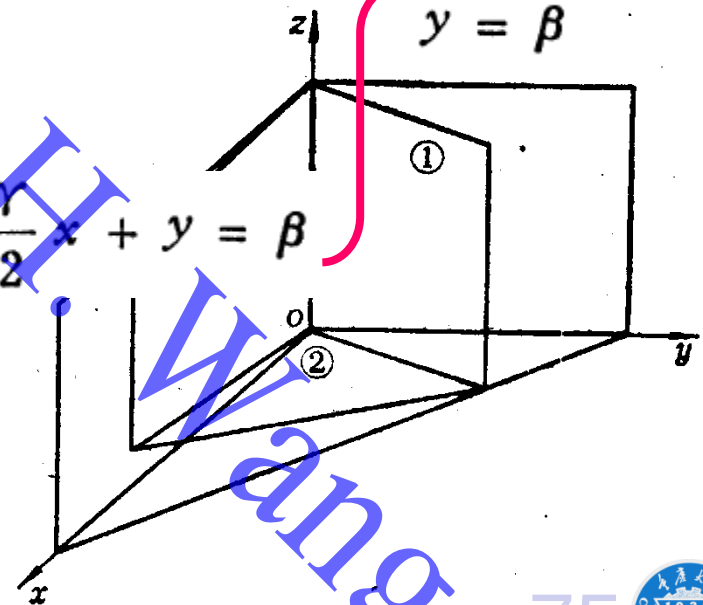
N1 与 N2 的夹角



$$x = -\alpha$$

$$y = \beta$$

$$-\frac{\gamma}{2} x + y = \beta$$



Vector Algebra

□ 三个面的单位法向量

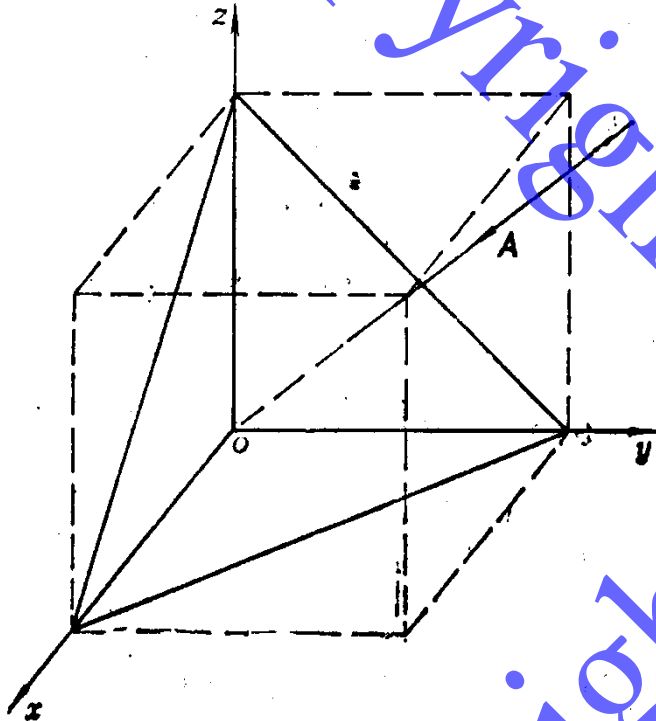
$$N_1 = \mathbf{i} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{j}$$

$$N_2 = -\alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$N_3 = -\frac{\gamma}{2} \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

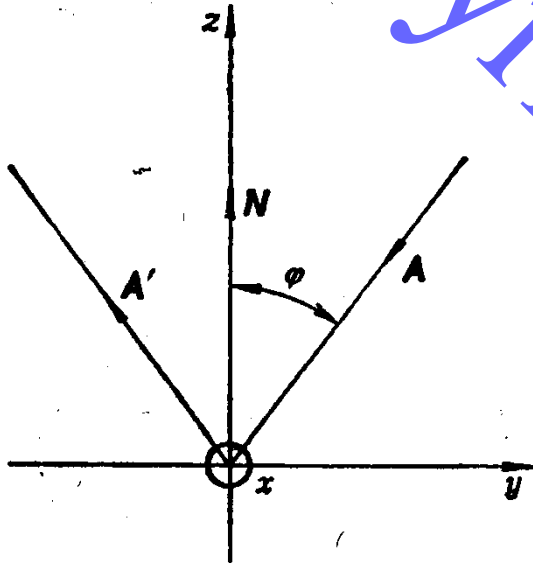
□ 设光线垂直于角锥棱镜的底面入射，入射光线单位向量 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$



Vector Algebra

□ 反射定律矢量表达式



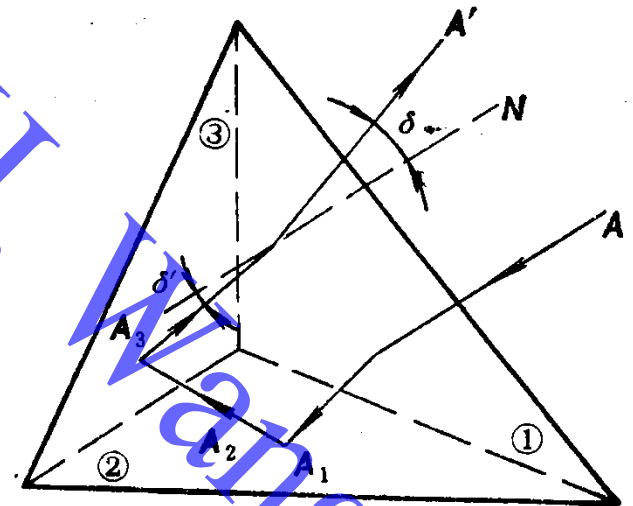
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{A})\mathbf{N}$$



Vector Algebra

- 利用反射定律向量表达式可得入射光线射到第①面后，第①面反射光线单位向量 **A_1**

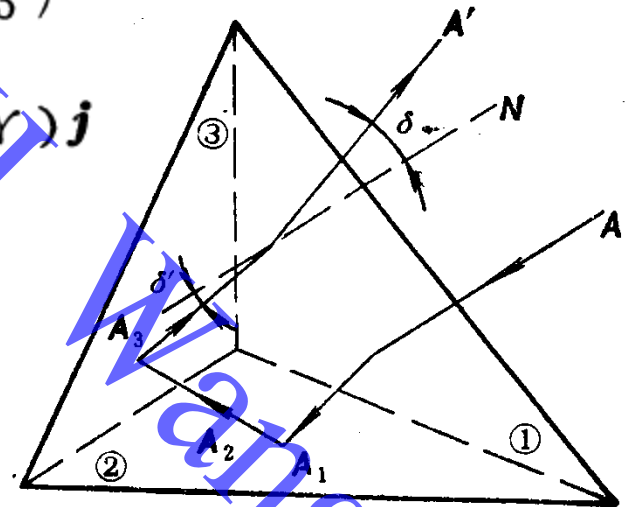
$$\begin{aligned} A_1 &= A - 2N_1(A \cdot N_1) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) - 2\left(\mathbf{i} - \frac{\gamma}{2}\mathbf{j}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}[(-1 + \gamma)\mathbf{i} + (1 + \gamma)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \end{aligned}$$



Vector Algebra

□ **A1**作为第②面的入射光线单位向量射入第②面，可得第②面的反射光线单位向量**A2**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_1 - 2\mathbf{N}_2(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}_2) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}[(-1 + \gamma)\mathbf{i} + (1 + \gamma)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \\
 &\quad - 2(-a\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \mathbf{k})(a + \beta + 1)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}[(-1 + 2a + \gamma)\mathbf{i} + (1 - 2\beta + \gamma)\mathbf{j} \\
 &\quad + (-1 - 2a - 2\beta)\mathbf{k}]
 \end{aligned}$$

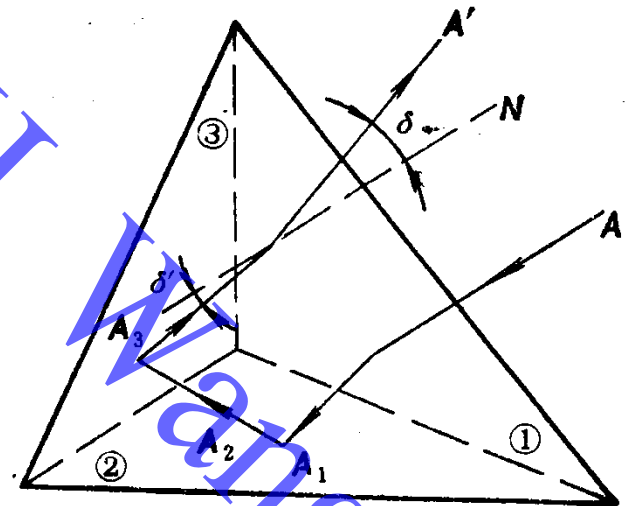


Vector Algebra

□ **A2**作为第③面的入射光线单位向量射入第③面，可得第③面的反射光线单位向量**A3**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}_2 - 2\mathbf{N}_3(\mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{A}_2) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}[(-1+2\alpha+2\gamma)\mathbf{i} + (-1+2\beta-2\gamma)\mathbf{j} \\ &\quad + (-1-2\alpha-2\beta)\mathbf{k}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) - \frac{2}{\sqrt{3}}[(\alpha + \gamma)\mathbf{i} \\ &\quad + (\beta - \gamma)\mathbf{j} + (-\alpha - \beta)\mathbf{k}] \end{aligned}$$



Vector Algebra

- 第③面的反射光线单位向量 **A3** 进入空气时，对于实体的角锥棱镜，由于玻璃折射率的影响，使进入空气中的折射光线 **A'** 与 **A3** 之间有下列关系

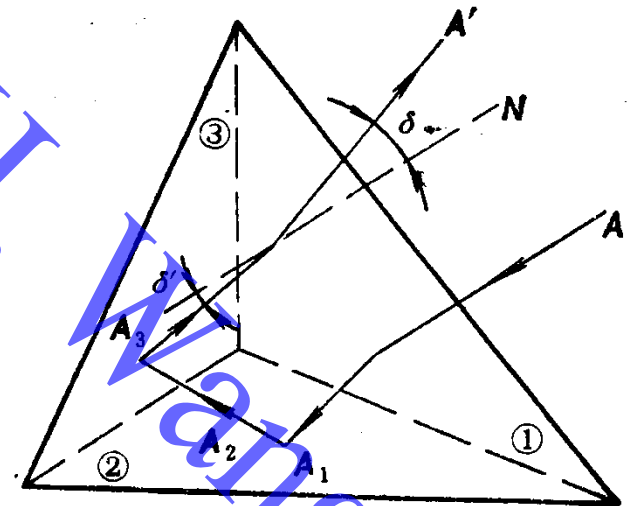
玻璃折射率

$$|\mathbf{A}' \times \mathbf{N}| = n |\mathbf{A}_3 \times \mathbf{N}|$$

角锥棱镜底面法线单位向量

$$\mathbf{N} = -\mathbf{A}$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$



Vector Algebra

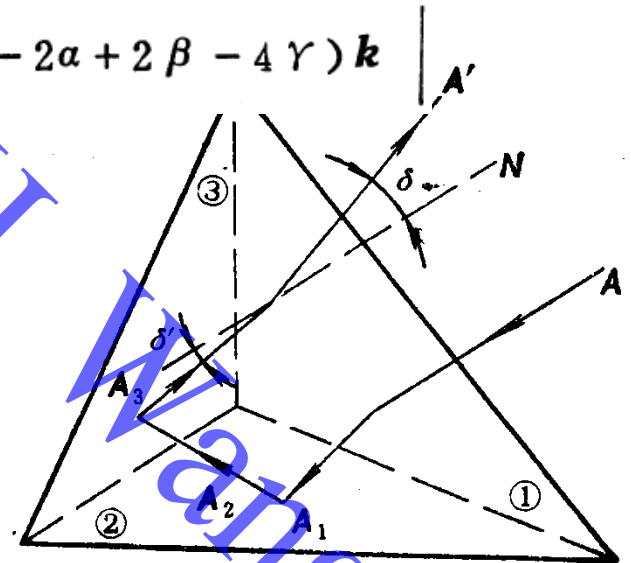
□ 由于 **A3** 对 **N** 的偏角 δ' 及 **A'** 对 **N** 的偏角 δ 一般都不大

$$\delta = n\delta'$$

$$= n \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}(-1+2\alpha+2\gamma) & -\frac{1}{\sqrt{3}}(-1+2\beta-2\gamma) & -\frac{1}{\sqrt{3}}(-1-2\alpha-2\beta) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

$$= n \left[\frac{1}{3} [(-2\alpha - 4\beta + 2\gamma)i + (4\alpha + 2\beta + 2\gamma)j + (-2\alpha + 2\beta - 4\gamma)k] \right]$$

$$\delta = 2n \sqrt{\frac{2}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta - \beta\gamma + \alpha\gamma)}$$



Vector Algebra

- 由3个直角偏差 α 、 β 、 γ 引起的表示入射光线和出射光线平行度偏角 δ 的关系

$$\delta = 2n \sqrt{\frac{2}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta - \beta\gamma + \alpha\gamma)}$$

□ 当 $\alpha = \beta = \gamma = 1''$ $n = 1.53$ $\Rightarrow$ $\delta = 5''$

□ 当 $\alpha = \beta = \gamma = 0.6''$ $n = 1.53$ $\Rightarrow$ $\delta = 3''$



Vector Algebra

- ❑ 光学仪器成象系统中棱镜或反射镜的空间位置有误差，造成反射光线方向发生变化及象位置发生变化而引起仪器误差时，原则上都可以采用矢量代数法进行分析。
- ❑ 具体分析步骤

 **Next Slide...**

Vector Algebra: 具体分析步骤

- 沿着光路，对每一个反射面应用反射定律向量表达式

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{A})\mathbf{N}$$

- 每一反射面的出射光线就是下一面的入射光线，连续应用上述公式，即可解决空间光线的传递问题，并得到最终出射光线的方向
- 根据出射光的方向，就可确定成像位置对理想成像位置的偏差
- 再利用几何关系等方法，可以求出由此而引起的仪器误差

Coordinator Transformation Method

- ❑ 工艺误差（制造误差）的存在，使仪器中一些特征点的坐标位置发生变化，引起仪器误差。这种坐标位置变化的基本形式可归纳为在二维空间或三维空间内点的平移和旋转，这种坐标位置的变化，可用坐标变换法进行分析
- ❑ 齐次坐标, 平移变换, 旋转变换
- ❑ 三维坐标矩阵表达式

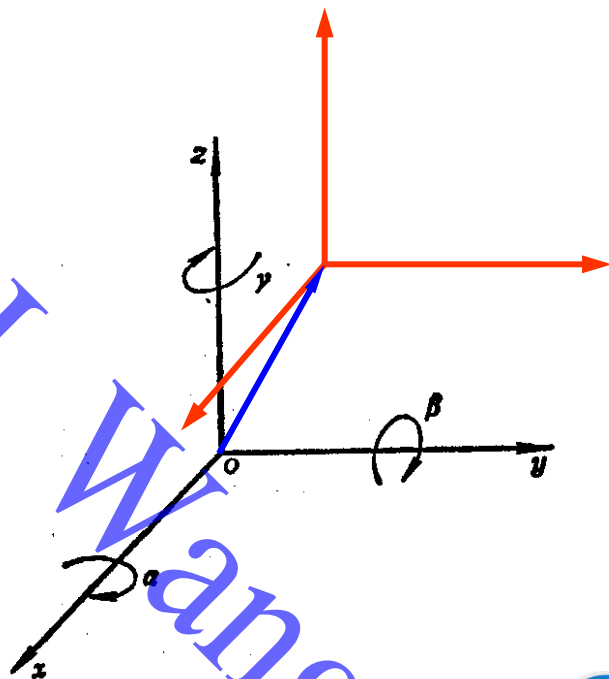
✍ 变换前 $[x \ y \ z]$

✍ 变换后 $[x^* \ y^* \ z^*]$

- ❑ 齐次坐标矩阵表达式

✍ 变换前 $[x \ y \ z \ 1]$

✍ 变换后 $[x^* \ y^* \ z^* \ 1]$

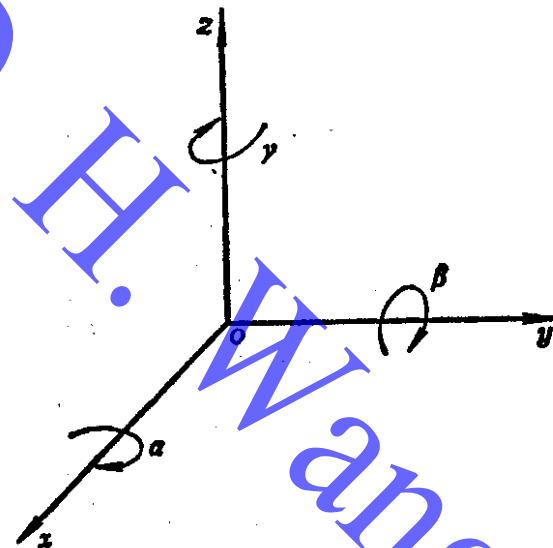


Coordinator Transformation Method

□ 平移变换

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ j & k & l & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix}$$

□ 旋转变换



Coordinator Transformation Method

□ 旋转变换：绕x轴旋转 α 角的情况

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* \end{bmatrix}$$

Coordinator Transformation Method

□ 旋转变换：绕y轴旋转 β 角的情况

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$= [x^* \ y^* \ z^*]$$

□ 旋转变换：绕z轴旋转 γ 角的情况

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [x^* \ y^* \ z^*]$$



Coordinator Transformation Method

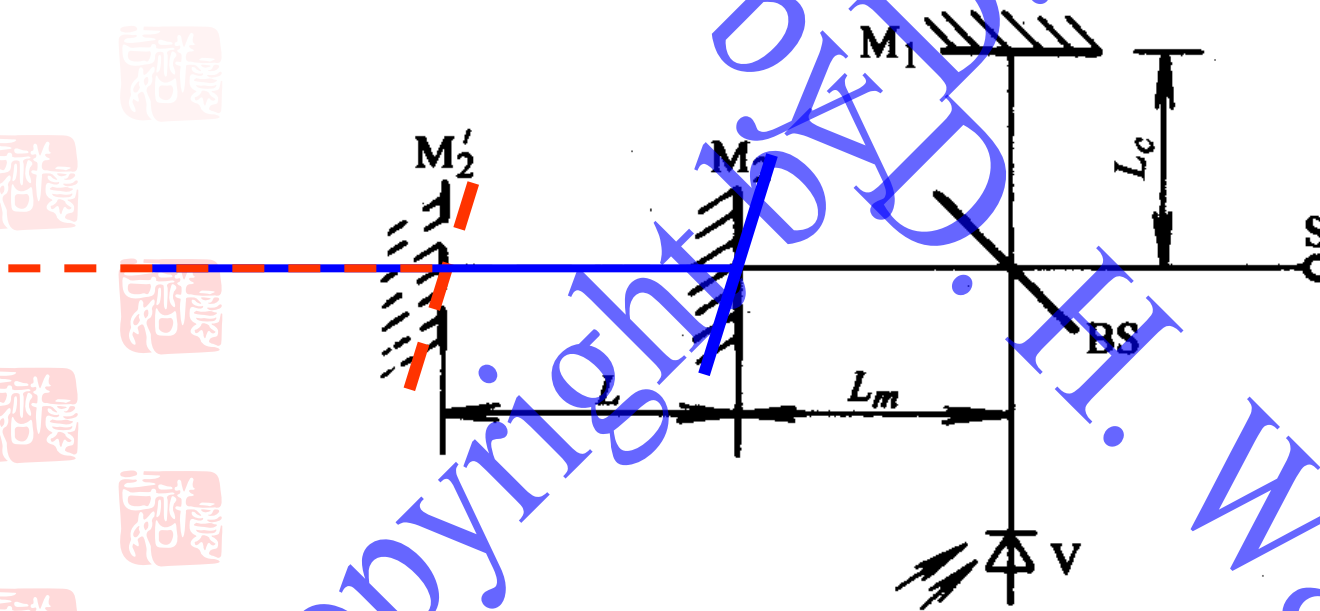
- 旋转变换：当某坐标点 (x, y, z) 绕 x 、 y 、 z 轴旋转 α 、 β 、 γ 角后，变换后的坐标位置为

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* \end{bmatrix}$$

Coordinator Transformation Method

□ Ex: Error Analysis of a laser interferometer

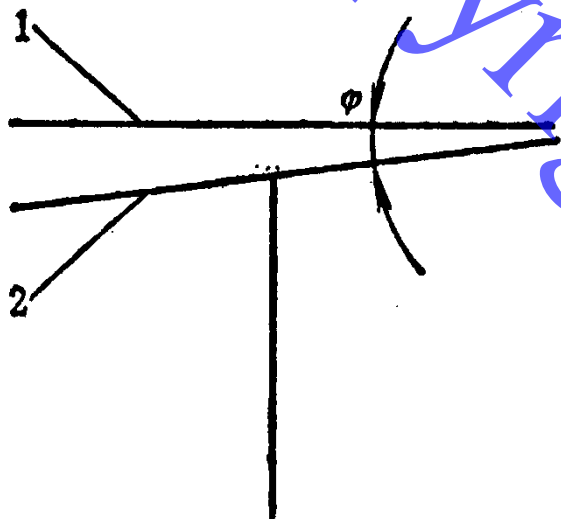
✍ 在迈克尔逊干涉系统中，可动镜移动时可能伴随产生转动和摆动，使干涉条纹的宽度和条纹的方向发生变化，计算这一影响



**Michelson
Interferometer**

Coordinator Transformation Method

□ 对一般迈克尔逊干涉系统，其产生干涉的可动镜和参考镜之间关系



✍ 可动镜与测杆位移方向有一倾角，测量时可动镜上下移动，如只有平移而无转动和摆动，则两镜夹角及两镜交线方向不变，故干涉条纹的宽度及方向均无变动。

1--参考镜虚镜；2--可动镜

□ 用坐标变换法计算可动镜上下移动过程中，由于转动和摆动引起的条纹宽度和条纹方向的变化

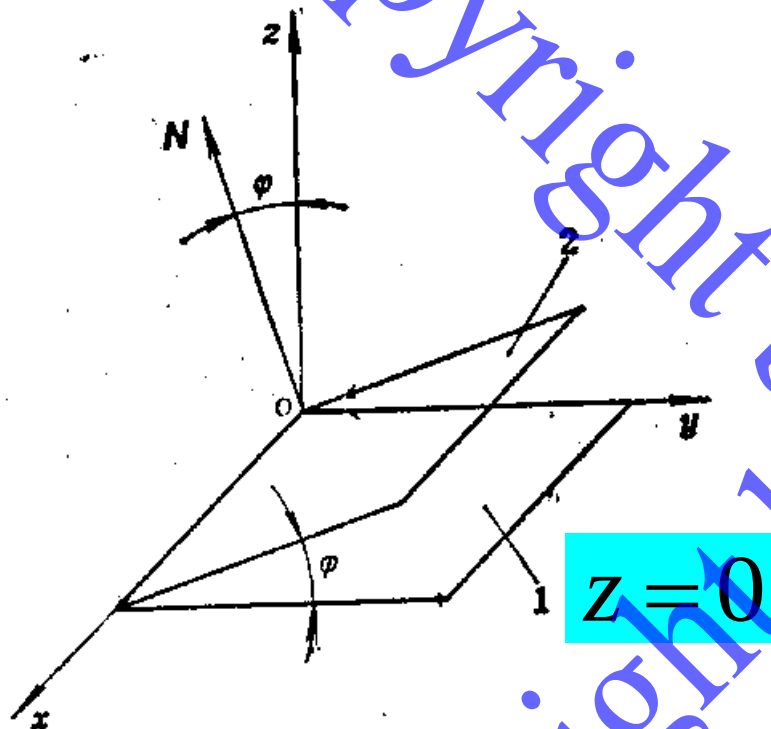
Coordinator Transformation Method

□ 取坐标系

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

□ 假设

可动镜上下移动时，对x轴和y轴分别有转动角 α 和 β ，绕z轴有转动角 γ



1--参考镜虚镜;
2--可动镜

$z=0$

Coordinator Transformation

□ 经过旋转变换，单位法向量的位置向量变为（旋转顺序 α, β, γ ）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可动镜 2
法线单位
向量 N

$$= \begin{bmatrix} -\cos \gamma \sin \beta (\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha) \\ + \sin \gamma (-\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) \\ \sin \gamma \sin \beta (\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha) \\ + \cos \gamma (-\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) \\ \cos \beta (\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha) \end{bmatrix}$$

Coordinator Transformation

□ Let

$$\left. \begin{aligned} & -\cos \gamma \sin \beta (\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha) \\ & + \sin \gamma (-\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) = \cos \alpha' \\ & \sin \gamma \sin \beta (\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha) \\ & + \cos \gamma (-\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) = \cos \beta' \\ & \cos \beta (\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha) = \cos \gamma' \end{aligned} \right\}$$

□ 可动镜 2 的平面方程

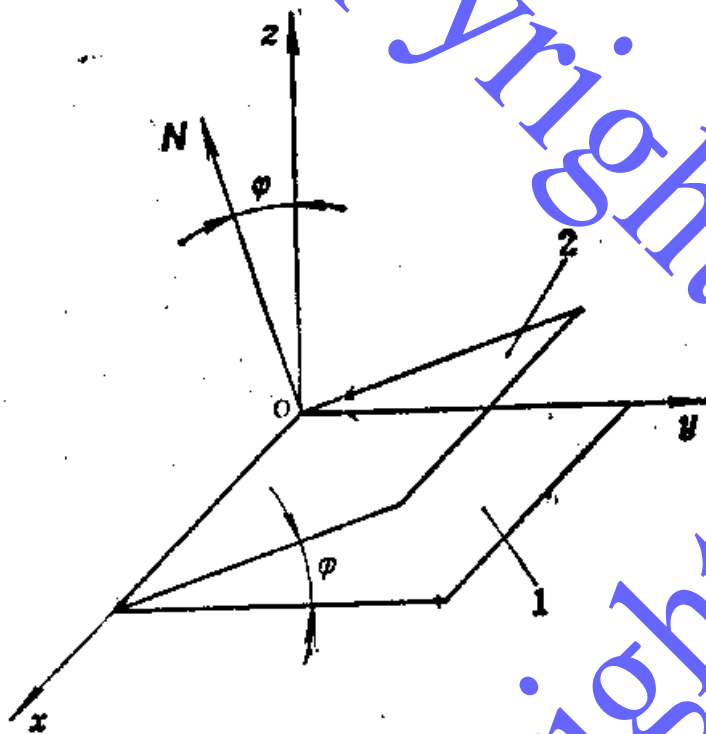
$$x \cos \alpha' + y \cos \beta' + z \cos \gamma' = 0$$



Coordinator Transformation

- 可动镜 2 的平面方程与 $z = 0$ 平面的交线方程

$$y = -\frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'} x$$



该方程的斜角即为代表在存在有摆动角转动角 α 、 β 、 γ 之后的干涉条纹的方向, 此时干涉条纹的方向不再与 x 轴平行

- 可动镜 2 的平面方程与 $z = 0$ 平面的夹角

Next Slide ...

Coordinator Transformation

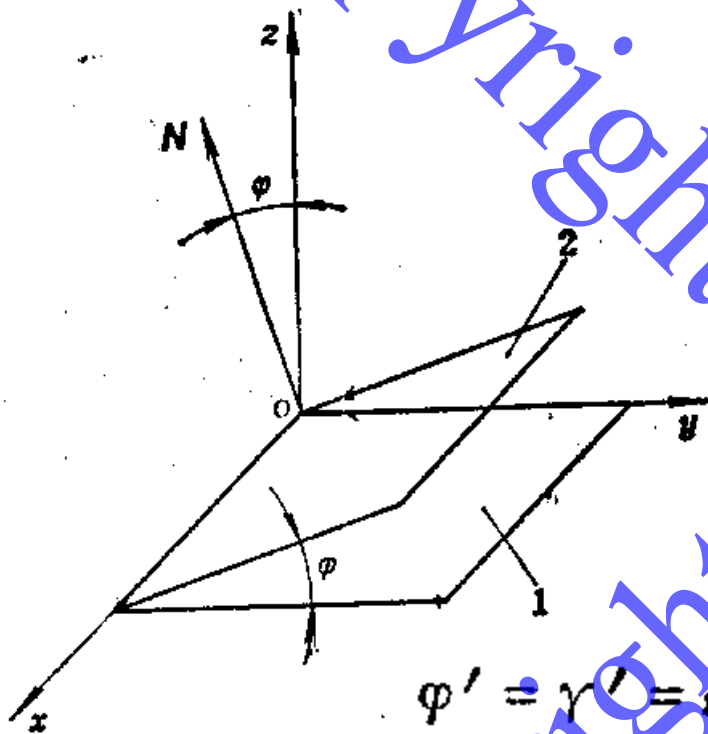
□ 可动镜 2 的平面方程与 $z = 0$ 平面的交线方程

$$y = -\frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'} x$$

□ 可动镜 2 的平面方程与 $z = 0$ 平面的夹角

$$\varphi' = \gamma' = \arccos[\cos \beta (\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha)]$$

✍ 此时两平面镜的夹角不再是 γ' ，而变为 φ ，说明干涉条纹的宽度发生了变化



Coordinator Transformation

- ❑ 在实际工作中，可动镜作上下移动时，其绕 x 、 y 、 z 三轴摆动和转动的先后顺序是随机的，而且绕某个轴摆动或转动时，其顺时针转向或逆时针转向也是随机的
- ❑ 不同的顺序，不同的转向， $\cos\alpha'$ 、 $\cos\beta'$ 、 $\cos\gamma'$ 的表达式及其数值便不一样。随之，条纹方向及条纹宽度也便不一样
- ❑ 一般来讲，只能进行多种情况的计算，来找出条纹方向及条纹宽度可能出现的最大变化的情况

Other Methods for Error Analysis

- ❑ 逐步投影法
- ❑ 球面三角法
- ❑ 经验估算法
- ❑ 实验测试法
- ❑



Summary (1/2)

❑ Basic concept

✍ Error Analysis/Precision Analysis

❑ Steps for Error Analysis and Calculation

✍ Step 1. Determine error sources

✍ Step 2. Analysis influence of each source to accuracy of instrument

✍ Step 3. Precision propagation & accumulation

❑ Error independent functional principle (EIFP)

❑ Error analysis methods



Summary (2/2)

- ❑ Basic concept
- ❑ Steps for Error Analysis and Calculation
- ❑ Error independent functional principle (EIFP)
- ❑ Error analysis methods

✍ Differential method

✍ Geometric method

✍ Functional line and instantaneous arm method

✍ Mathematical fitting method

✍ Error analysis method for control systems

✍ Vector Algebra

✍ Coordinate Transformation

✍ Other methods



The End

*Thank you very much for
your attention!*

