

Chapter 7. Modern Design Methodology of Instruments

Lecture 3. Optimization Design Method

王代华，博士，教授，博士生导师

Dr. Dai-Hua, Wang, Professor

PILab

精密與智能實驗室

Precision and Intelligence Laboratory

<http://www.pilab.coe.cqu.edu.cn/>

Email: dhwang@cqu.edu.cn

Tel: 023-65112105(O), 65102511(Lab)

重庆大学，光电工程学院

© Copyright by D. H. Wang 2009 All Rights Reserved.

Outline

- ❑ Basic Terminology
- ❑ Design Process
- ❑ Case Study



Copyright by D. H. Wang

Basic Terminology

- 工程优化问题
- 工程优化的理论基础
- 工程优化的主要工具
- 优化设计方法在测控仪器设计中的应用

 光学系统像差自动校正

 精密机构参数的设计计算

 仪器精度设计

 传感器参数选择



Basic Terminology

□ 设计变量

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

□ 目标函数

$$\min F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$



Basic Terminology

□ 设计变量

□ 目标函数

✍ 单目标函数：依据一项设计准则建立目标函数

$$\min F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

✍ 多目标函数：兼顾多项设计准则建立目标函数

$$F(X) = \sum \lambda_k f_k(X)$$

□ 处理多目标函数的方法

✍ 目标法

✍ 线性加权法

✍ 理想点法

✍ 功效系数法



Basic Terminology

□ 约束条件

 不等式约束

$$g_i(X) \geq 0 \text{ or } g_i(X) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

 等式约束

$$h_j(X) = 0 \quad (j = (m+1), (m+2), \dots, p)$$

 边界约束

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

□ 可行设计点

 可行设计区域

□ 非可行设计点

 不可行设计区域



Basic Terminology

□ 优化设计的数学模型

$$\begin{array}{ll} \text{求} & X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ \text{min} & F(X) \\ \text{s.t.} & g_i(X) \leq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m) \\ & h_j(X) = 0 \quad (j = (m+1), (m+2), \dots, p) \\ & a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{array}$$

□ 最优解

 局部最优解

 全局最优解

□ 线性问题与非线性问题

□ 多目标优化问题



Model

□ **Ex:** 要用薄钢板制造一体积为 **5m³** 的汽车货箱, 由于运输的货物要求其长度不小于 **4m**. 为了使消耗的钢板最少并减少质量, 问应如何选取货箱的长 **x₁**, 宽 **x₂**, 高 **x₃** ?

$$F(X) = F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + 2(x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3)$$

$$h(X) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 5.0$$

$$g_1(X) = 4.0 - x_1 \leq 0$$

$$g_2(X) = -x_2 \leq 0$$

$$g_3(X) = -x_3 \leq 0$$

Model

□ Ex.

$$\min F(X) = \min [x_1 \cdot x_2 + 2(x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3)]$$

s. t. $h(X) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 5.0$

$$g_1(X) = 4.0 - x_1 \leq 0$$

$$g_2(X) = -x_2 \leq 0$$

$$g_3(X) = -x_3 \leq 0$$

$$\min F(X) = \min \left[x_1 \cdot x_2 + 10 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \right]$$

s. t. $g_1(X) = 4.0 - x_1 \leq 0$

$$g_2(X) = -x_2 \leq 0$$



Design Process

□ Geometrical Description

目标函数

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4$$

约束条件

$$g_1(x) = x_1 - x_2 + 2 \geq 0$$

$$g_2(x) = -x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_4(x) = x_2 \geq 0$$

最优解

x^*

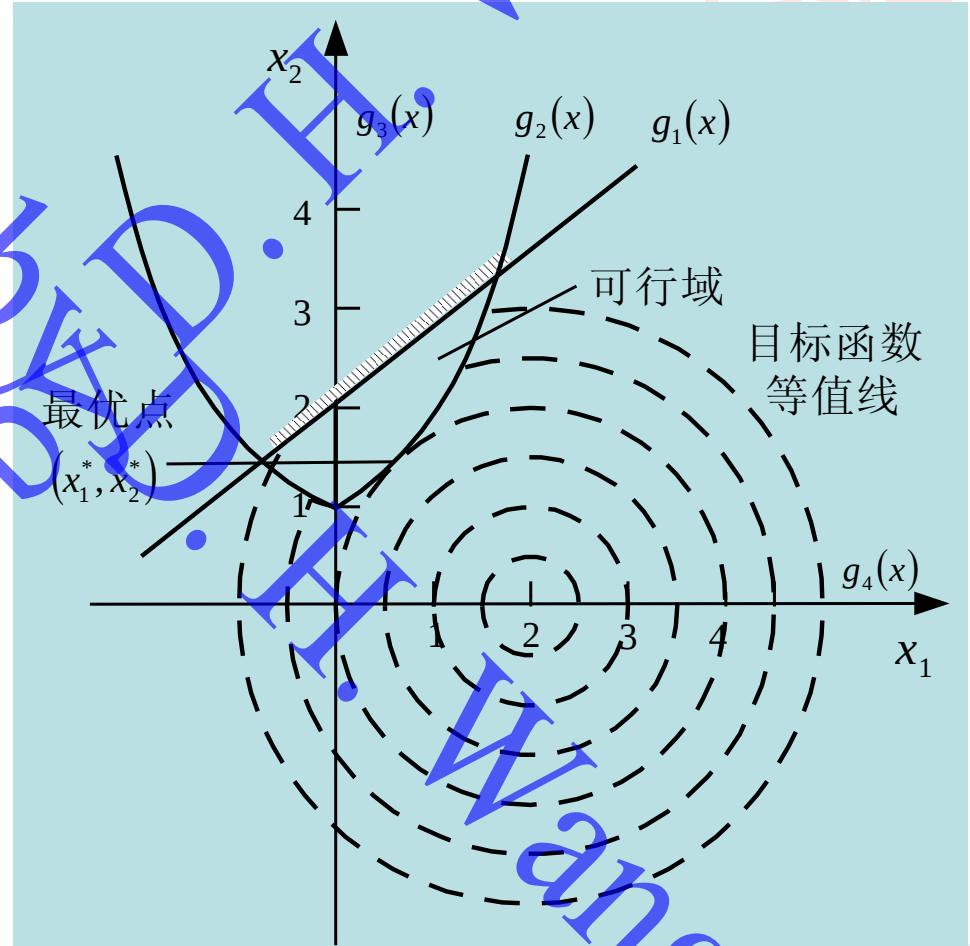
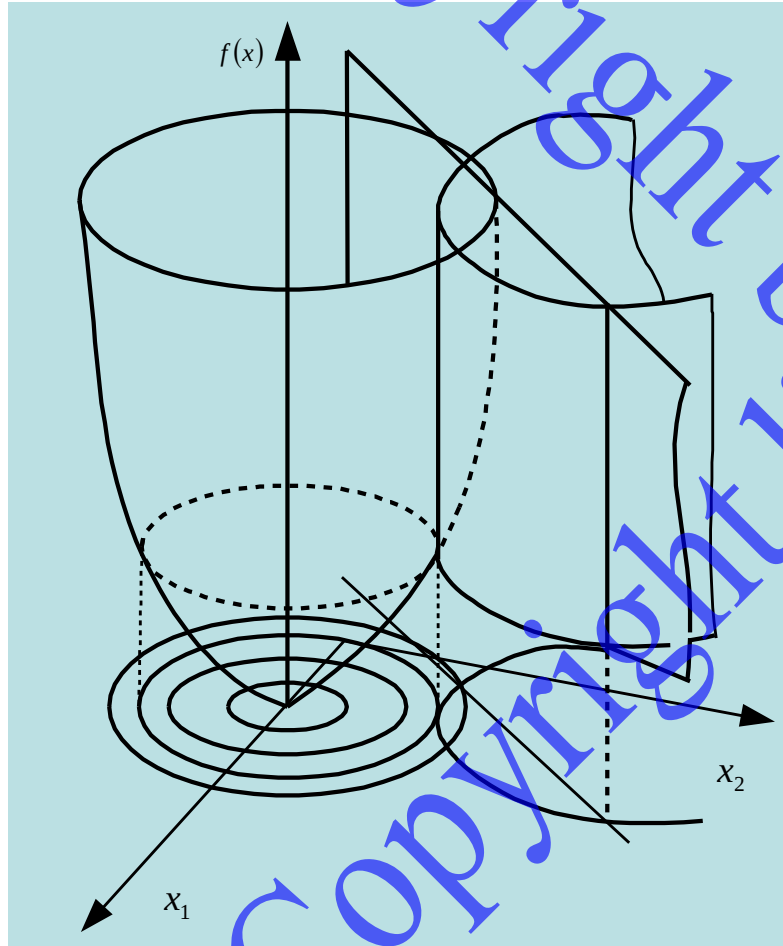


Design Process

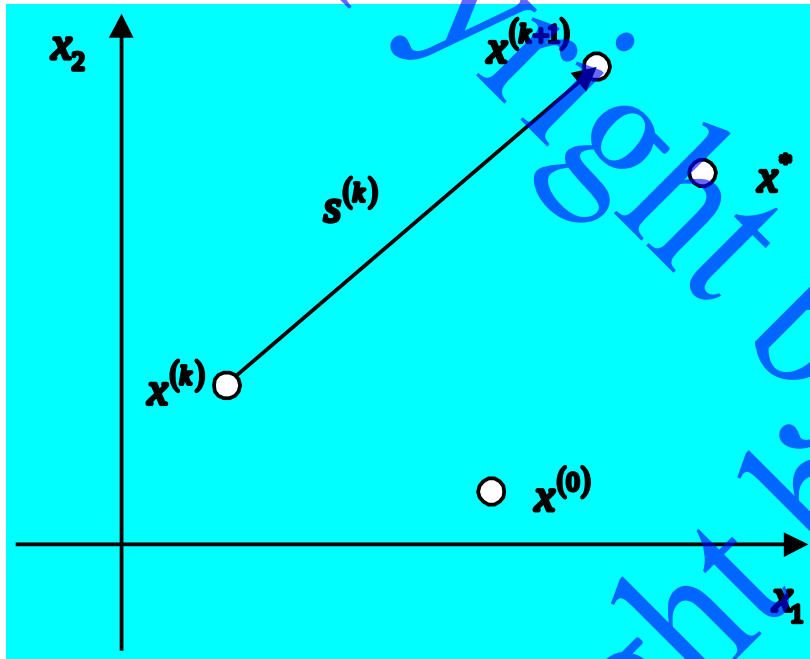
□ Geometrical Description

约束优化: $X^*(0.58, 1.34)$, $F(X^*)=3.80$

无约束优化: $X^*(2, 0)$, $F(X^*)=0$



Design Process



□ Solution process

$$x(k+1) = x(k) + \alpha(k)s(k)$$

□ 终止准则

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$$

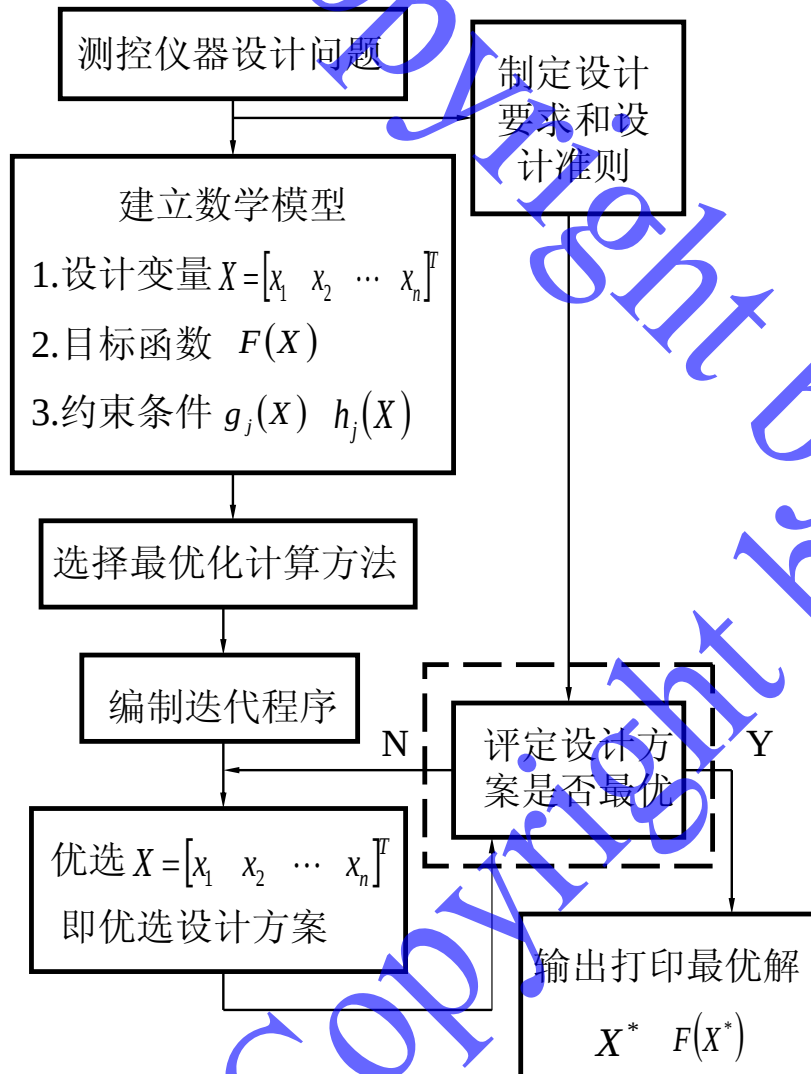
$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})^2} \leq \varepsilon$$

$$\|F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})\| \leq \varepsilon$$

$$\frac{\|F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})\|}{\|F(x^{(k+1)})\|} \leq \varepsilon$$

$$\|\nabla F(x^{(k+1)})\| \leq \varepsilon$$

Design Process



Mathematical Methods

□ 解析方法

 直接解出具有最优设计的解析表达式

□ 数值方法

 数学规划法

 优化准则法



无约束极小化方法

□ 优化模型

$$\begin{array}{ll} \text{求} & \mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ \min & F(\mathbf{X}) \end{array}$$



□ 无约束极小化方法

类型 名称 序号	不用导数的算法	一阶导数算法	二阶导数算法
1	单纯形法	最速下降法	牛顿法
2	Powell 共轭方向法	共轭梯度法	拟牛顿或变尺度法(BFG 和DFP变尺度法)



线性约束优化问题

□ 优化模型

$$\begin{array}{ll}\text{求} & X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ \text{min} & F(X)\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\text{s.t.} & g_i(X) \leq 0 \quad (i=0, 1, \dots, m) \\ & h_j(X) = 0 \quad (j=(m+1), (m+2), \dots, p) \\ & a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i=1, 2, \dots, n)\end{array}$$

□ 如果式中约束函数 $g_i(X)$ 与 $h_j(X)$ 均是 x_i 的线性函数，且目标函数 $F(X)$ 也是线性函数，则上式就是一个线性规划问题，可采用修正单纯形法或对偶单纯形法求解。



线性约束优化问题

- 线性规划解法是最为成熟、可靠的一种优化算法。如果目标函数 $F(x)$ 是二次函数，则上式是一个二次规划问题，可采用Wolf法或lemke线性互补枢轴算法求解，这些算法也是比较成熟的。

非线性有约束极小化问题

□ 优化模型

求 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

min $F(X)$

s.t. $g_i(X) \leq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m)$

$h_j(X) = 0 \quad (j = (m+1), (m+2), \dots, p)$

$a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$



非线性有约束极小化问题

□ 求解方法

类型 算法 序号	使用导数的算法	罚函数法	不用导数的算法
1	可行方向法	内罚函数法	复合形法
2	梯度投影法	外罚函数法	随机试验法
3	简约梯度法	混合罚函数法	网格法
4	序列线性规划法	精确罚函数法	
5	序列二次规划法	增广乘子法	



Software

□ 自己编制优化程序求解优化问题

 检验编制程序的有效性

 检验优化结果的有效性

□ 利用通用的优化设计软件包求解优化问题

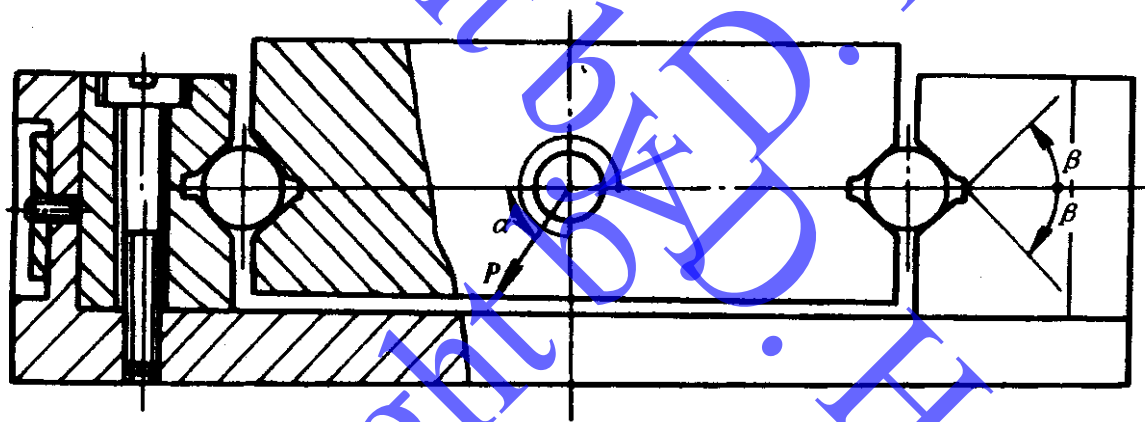
 根据软件包提供的计算程序的要求准备初始数据

 **Ex.: Matlab 环境中的 Optimization Toolbox**



Case Study: 无约束最小推力滚珠导轨的优化设计

- 如图所示的双V形滚珠导轨是精密仪器及机械中常用的滚珠导轨结构形式之一，在设计这种导轨时要求保证在外载荷一定的情况下导轨运动所需的推力最小，即运动最灵敏



导轨推力

$$T = \frac{2k}{d \cdot \sin \beta} \left[2P_0 z + P \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right) \right]$$

Case Study: 无约束最小推力滚珠导轨的优化设计

□ 滚珠直径的计算公式

$$d = \sqrt{\frac{P'}{K \cdot \varepsilon}}$$

$$P' = \left(\frac{P_0 + P \cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{P \sin \alpha}{2 \cos \beta} \right) z$$

□ 表面硬度系数与硬度之间的关系

HRC	45	50	55	57	60
ε	0.3	0.52	0.7	0.8	1.0

Case Study: 无约束最小推力滚珠导轨的优化设计

□ 优化设计数学模型

✍ 设计变量

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T = [\alpha \quad \beta \quad \varepsilon \quad P_0 \quad Z]^T$$

✍ 目标函数

$$T = \frac{2k(K \cdot \varepsilon)^{1/2}}{\left[\left(\frac{P_0 + P \cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{P \sin \alpha}{2 \cos \beta} \right) \frac{1}{Z} \right]^{1/2}} \left[2P_0 Z + P \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right) \right]$$

$$T = F(\alpha, \beta, \varepsilon, P_0, Z) = F(\mathbf{X})$$

Case Study: 无约束最小推力滚珠导轨的优化设计

□ 优化设计数学模型

✍ 目标函数

求

$$X = [\alpha \quad \beta \quad \varepsilon \quad P_0 \quad Z]^T$$

$$\min F(X) = \min \left\{ \frac{2k(K \cdot \varepsilon)^{1/2}}{\left[\left(\frac{P_0 + P \cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{P \sin \alpha}{2 \cos \beta} \right) \frac{1}{Z} \right]^{1/2}} \left[2P_0 Z + P \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right) \right] \right\}$$

Case Study: 无约束最小推力滚珠导轨的优化设计

□ 设计实例

✍ 初始设计参数

$$\alpha^{(0)} = 30^\circ, \beta^{(0)} = 30^\circ, \varepsilon^{(0)} = 0.3, P_0^{(0)} = 50, Z^{(0)} = 6$$

$$T^{(0)} = 1.9148 \text{ N}$$

✍ 优化设计结果

$$\alpha^{(*)} = 30.66092^\circ, \beta^{(*)} = 31.56629^\circ, \varepsilon^{(*)} = 0.18455$$

$$P_0^{(*)} = 53.3677$$

$$Z^{(*)} = 4.17895$$

$$T^{(*)} = 0.9348 \text{ N}$$

$$\frac{T^{(0)} - T^{(*)}}{T^{(*)}} = 1.04051$$

Case Study: 无约束最小推力滚珠导轨的优化设计

设计方案 序号	初始设计参数					初始设计推力 $T^{(0)} (N)$
	$\alpha^{(0)}$	$\beta^{(0)}$	$\varepsilon^{(0)}$	$P_0^{(0)}$	$Z^{(0)}$	
1	30	30	0.3	50	6.0	1.9184
2	35	35	0.52	55	8.0	3.6490
3	40	40	0.70	60	10	5.7450
4	45	45	0.80	65	12	7.9618
5	50	50	1.0	70	14	11.1494
6	55	55	0.3	75	16	7.4422
7	60	60	0.52	80	18	1.6656
8	65	35	0.70	50	6.0	2.8398
9	70	40	0.80	55	8.0	4.5078
10	75	45	1.0	60	10	6.9443
11	80	50	0.3	65	12	4.9775
12	85	55	0.52	70	14	8.2520

E-mail: dhwang@cqu.edu.cn

URL: <http://www.pilab.coe.cqu.edu.cn/>

Case Study: 无约束最小推力滚珠导轨的优化设计

设计方案 序号	优化设计参数					优化设计 推力	推力降 低倍值
	$\alpha^{(*)}$	$\beta^{(*)}$	$\varepsilon^{(*)}$	$P_0^{(*)}$	$Z^{(*)}$		
1	30.66092	31.56629	0.18455	53.3677	4.17859	0.9384	1.04051
2	35.64301	36.51773	0.55248	43.8811	2.67018	2.2887	0.59430
3	40.64301	41.51773	0.73248	48.8811	8.27018	3.8634	0.48701
4	45.64301	46.51773	0.83248	53.8811	10.27018	5.6458	0.41021
5	50.56766	51.36285	1.03004	60.5670	12.41005	8.5120	0.30985
6	55.44557	56.35094	0.08340	76.2142	16.05149	3.6366	0.89048
7	61.07951	61.29949	0.36766	69.5685	18.04971	8.8474	0.31864
8	65.43534	36.31005	0.71172	50.5853	3.9305	1.6021	0.77253
9	70.64301	41.51773	0.83248	43.8811	6.27018	2.8087	0.60490
10	75.64301	46.51773	1.03248	48.8811	8.27018	4.6652	0.48853
11	80.52740	51.43276	0.07566	67.0325	11.80159	2.4520	1.02994
12	86.07951	56.29949	0.41563	70.4971	12.47662	6.2062	0.33054

Case Study: 有约束最小推力滚珠导轨的优化设计

□ 优化设计数学模型

✍ 设计变量

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T = [\alpha \quad \beta \quad \varepsilon \quad P_0 \quad Z]^T$$

✍ 目标函数

$$T = \frac{2k(K \cdot \varepsilon)^{1/2}}{\left[\left(\frac{P_0 + P \cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{P \sin \alpha}{2 \cos \beta} \right) \frac{1}{Z} \right]^{1/2}} \left[2P_0 Z + P \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right) \right]$$

✍ 约束条件

Case Study: 有约束最小推力滚珠导轨的优化设计

□ 优化设计数学模型

 设计变量

 目标函数

 约束条件

$$30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$30^\circ \leq \beta \leq 60^\circ$$

$$40 \leq P_0 \leq 80$$

$$0.3 \leq \varepsilon \leq 1$$

$$4 \leq Z \leq 18$$



Case Study: 有约束最小推力滚珠导轨的优化设计

□ 优化设计数学模型

求

$$X = [\alpha \quad \beta \quad \varepsilon \quad P_0 \quad Z]^T$$

$$\min F(X) = \min \left\{ \frac{2k(K \cdot \varepsilon)^{1/2}}{\left[\left(\frac{P_0 + P \cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{P \sin \alpha}{2 \cos \beta} \right) \frac{1}{Z} \right]^{1/2}} \left[2P_0 Z + P \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right) \right] \right\}$$

sub

$$\begin{aligned} 30^\circ &\leq \alpha \leq 90^\circ \\ 30^\circ &\leq \beta \leq 60^\circ \\ 0.3 &\leq \varepsilon \leq 1 \\ 40 &\leq P_0 \leq 80 \\ 4 &\leq Z \leq 18 \end{aligned}$$

Case Study: 有约束最小推力滚珠导轨的优化设计

□ 设计实例

✍ 初始设计参数

$$\mathbf{X}^{(0)} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T = [45 \quad 45 \quad 8 \quad 65 \quad 12]^T$$

✍ 优化设计结果

✍ 采用复合形法进行优化计算，收敛系数 $\varepsilon' = 1 \times 10^{-7}$

✍ 所得结果为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(*)} &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T \\ &= [30.00006 \quad 59.73737 \quad 3.004592 \quad 40 \quad 4]^T \end{aligned}$$

$$T^{(*)} = 0.6842842 \text{ N}$$

Summary



Copyright by D. H. Wang

Acknowledgement



***Thank you very much for
your attention!***

